Lehrbuch

der

Arithmetik

mit den nöthigen

Uebungs-Aufgaben

für

Latein- und Gewerbschulen,

sowie für

Privat-Lehrinstitute und insbesondere für den Selbst-Unterricht

von

Joh. Nep. Rapp,

kgl. Studienlehrer.

Vom k. b. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten gebilligt und in das Verzeichniß der genehmigten Schulbücher aufgenommen.

Ingolstadt 1877.

Druck und Verlag der A. Ganghofer'schen Buchhandlung.

Vorwort.

Dieses Werkchen ist bestimmt, einen dreifachen Zweck zu erfüllen: erstens soll es ein gründliches Lehrbuch für den Selbst-Unterricht sein; zweitens soll es zugleich als Leitfaden dienen, zu welchem Zwecke die wichtigsten Lehrsätze, Verfahrungsarten und Stellen mit durchschossenen Lettern besonders hervorgehoben und für das Auge bemerklich gemacht sind; drittens enthält es eine Sammlung der zur Uebung nöthigen Aufgaben, welche schon an der zugehörigen Stelle sich befinden und daher für den Bedarf sogleich bequem zur Hand sind.

Die Uebungs-Aufgaben hat der Verfasser so zusammengesetzt, daß, wenn zur rechten Zeit gehörig ver-

einfacht wird, keine übermäßig großen Zahlen sich entwickeln, wodurch die Ausrechnung unverhältnißmäßig viel Zeit rauben würde.

Möge das Buch nun das leisten, wozu es bestimmt ist.

Ingolstadt, im Februar 1877.

Joh. Nep. Rapp.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	1
I. Abtheilung.	
Erster Abschnitt. Das Numeriren	2
Römische Zahlen	4
Von den vier Rechnungsarten mit unbenannten Zahlen .	5
I. Addition	5
II. Subtraction	7
III. Multiplication	13
IV. Division	22
Zweiter Abschnitt. Von den benannten Zahlen	28
Vom Reduciren	28
a) Reduction von Einheiten höherer Ordnungen auf Einheiten niedrigerer Ordnung (Resolviren) . . .	29
b) Reduction von Einheiten einer Ordnung auf Einheiten höherer Ordnungen (Reduciren im engeren Sinne) .	32
Von den vier Rechnungsarten mit benannten Zahlen .	38
I. Addition	38
II. Subtraction	42
A. Altersrechnungen insbesondere	45
B. Zeitrechnungen überhaupt	48
III. Multiplication	50
IV. Division	53
II. Abtheilung.	
Erster Abschnitt. Von der Theilbarkeit der Zahlen . . .	60
Kennzeichen der Theilbarkeit der Zahlen	61
Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Divisors zweier und mehrerer Zahlen	63
Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen mehrerer Zahlen	64
Faktorenzerlegung	65

	Seite
Zweiter Abschnitt. Von den gemeinen Brüchen	68
Erklärungen	68
Addition der Brüche	72
Subtraction der Brüche	74
Multiplication der Brüche	76
Division der Brüche	78
Zusammengesetzte Bruchrechnungen	79
Dritter Abschnitt. Dezimalbrüche.	80
Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche . .	82
Addition der Dezimalbrüche	86
Subtraction der Dezimalbrüche	87
Multiplication der Dezimalbrüche	88
Division der Dezimalbrüche	90
Verwandlung von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche .	93
Die vier Rechnungsarten mit einem Gemische von gemeinen und Dezimalbrüchen	95
Addition	95
Subtraction	96
Multiplication	96
Division	96
Abgekürzte Multiplication und Division von Dezimalbrüchen	98
A. Multiplication	98
B. Division	100
Von den gebrochenen Brüchen	102
Von den Kettenbrüchen	104

III. Abtheilung.

Erster Abschnitt. Schlußrechnungen	109
Einfache Schlußrechnungen	110
Zusammengesetzte Schlußrechnungen	112
Zinsrechnungen mit einfachen Zinsen (durch Schlüsse) .	114
Zweiter Abschnitt. Von den Verhältnissen und Proportionen .	116
A. Verhältnisse	116
a. Arithmetische Verhältnisse	117
b. Geometrische Verhältnisse	118
B. Proportionen	119
a. Arithmetische Proportionen	121
b. Geometrische Proportionen	123
Anwendung der arithmetischen Proportionen . .	127
Anwendung der geometrischen Proportionen . .	131
Dritter Abschnitt. Zinsrechnungen	139
1. Einfache Reductionen von Einheiten eines Maß-, Gewichts- od. Münzsystems auf die eines anderen Systems	142

	Seite
2. Mehrfache Reductionen von Maßen, Münzen und Preisen	147
Procent-Rechnungen	152
A. Aufgaben mit gegebenen Procenten	152
a. Den Kauf- oder Verkaufpreis zu berechnen . .	152
b. Tara-Rechnungen.	155
c. Rabatt-Rechnungen	157
d. Agio-Rechnungen	160
B. Aufgaben mit zu suchenden Procenten . . .	162
Vierter Abschnitt. Theilungs- und insbesondere Gesellschafts-Rechnungen	166
A. Theilungs-Rechnungen	166
B. Gesellschafts-Rechnungen	168
a. Einfache Gesellschafts-Rechnungen	169
b. Zusammengesetzte Gesellschafts-Rechnungen . .	171
Fünfter Abschnitt. Mischungs- und insbesondere Alligations-Rechnungen	177
Anhang. Maße und Gewichte	191

Einleitung.

§ 1.

Arithmetik ist die Lehre von den Zahlenverbindungen. Dinge, welche in ihren Eigenschaften, die in Betracht kommen, übereinstimmen, heißen gleichartig.

Jedes von mehreren gleichartigen Dingen heißt Einheit. Jede Zahl drückt eine Menge von Einheiten aus.

Man unterscheidet unbenannte und benannte Zahlen; im ersteren Falle bleibt die Art der Einheiten unberücksichtigt und kommt bloß deren Menge in Betracht, im letzteren Falle ist auch die Art bezeichnet.

§ 2.

1) In dem der Arithmetik zu Grunde gelegten Zahlensysteme gibt es neun verschiedene Zahlzeichen oder Ziffern und die Null „0", welch letztere für sich keinen Werth hat und zur Besetzung derjenigen Stellen dient, für welche keine gewertheten Ziffern gegeben sind. Diese neun Ziffern, arabische genannt, sind, nach ihrem steigenden Werthe geordnet, folgende: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Die erste Ziffer davon bezeichnet die Einheit, von jeder nachfolgenden Ziffer ist der Werth um eine Einheit größer als von der nächst vorhergehenden.

Anmerkung. Unsere arabischen Ziffern, sowie unser Zahlensystem stammen von den Indern, wurden von den Arabern angenommen und später von diesen nach dem Abendlande verbreitet.

2) Mittels der neun Ziffern und der Null lassen sich alle denkbaren Werthe ausdrücken. Zu diesem Behufe werden die Ziffern passend neben einander gereiht und kommt einer Ziffer an jeder Stelle von der Rechten gegen die Linke ein zehnmal größerer Werth zu als an der nächst vorhergehenden Stelle.

3) Der von der Stelle abhängige Werth einer Ziffer heißt der Lokal- oder Stellenwerth, zum Unterschiede von dem Nominal- oder Nennwerthe, welcher durch die Anzahl der Einheiten einer Ziffer bestimmt wird. Die Lokalwerthe der Ziffern einer Zahl sind also Werthe von verschiedenen höheren Ordnungen. An der ersten Stelle (von der Rechten gegen die Linke) sind die Einheiten der ersten und niedrigsten Ordnung, sie heißen die Einer; an der zweiten Stelle sind die Einheiten der zweiten Ordnung, die Zehner genannt; an der dritten Stelle die Einheiten der dritten Ordnung oder die Hunderter; an der vierten Stelle die Tausender, dann folgen die Zehntausender und Hunderttausender, hierauf die Einer, Zehner und Hunderter der Million etc.

4) Zehn Einheiten einer Ordnung geben immer eine Einheit der nächst höheren Ordnung; also geben 10 Einer einen Zehner, 10 Zehner 1 Hunderter, 10 Hunderter 1 Tausender etc.

5) Unser so gebildetes Zahlen-System heißt das dekadische oder Dezimal-System (Zehner-System). Beim dekadischen Zahlen-Systeme ist also die Eintheilungs- oder Grundzahl 10.

Anmerkung. Man unterscheidet noch andere Zahlensysteme, wie: das dyadische, triadische, tetradische, pentadische, hexadische, heptadische, dodekadische etc., je nachdem die Eintheilungszahl beziehungsweise 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12 etc. ist. So viele Einheiten die Grundzahl hat, eben so viele Ziffern, einschließlich der Null, sind für das Zahlensystem nöthig.

I. Abtheilung.

Erster Abschnitt.

§ 3.

Das Numeriren.

Das Numeriren ist von doppelter Art, es besteht darin, daß man

1) die geschriebenen Zahlen ausspricht und

2) die ausgesprochenen Zahlen in Ziffern anschreibt.

a) Behufs leichterer Uebersicht zum Aussprechen der geschriebenen Zahlen theilt man dieselben in lauter dreizifferige Klassen

von der Rechten nach der Linken durch das Komma ein und zwar wird nach den ersten drei Ziffern das Komma unten, nach den nächsten 3 Ziffern oben, dann wieder unten u. s. w. in regelmäßiger Abwechslung gesetzt. Das erste obere Komma trifft es also nach den ersten 6 Ziffern, es zeigt an, daß links davon die Einheiten der Million sind; nach den nächsten 6 Ziffern trifft es das zweite obere Eintheilungszeichen, es besteht aus 2 Strichen und bezeichnet die Billionen; nach weiteren 6 Ziffern kommt das dritte obere Zeichen mit 3 Strichen, welches die Trillionen anzeigt, u. s. f.

Die dreizifferigen Klassen enthalten stets nur Einer, Zehner und Hunderter und unterscheiden sich bloß durch verschiedene Beinamen. Jede links von einem unteren Eintheilungsstriche stehende Klasse hat den Beinamen „Tausend", mit Ausnahme der ersten Klasse, welche keinen Beinamen bekommt; und jede links von einem oberen Eintheilungszeichen befindliche Klasse erhält den Beinamen, welchen das obere Zeichen angibt.

b) Ausgesprochen wird eine Zahl immer von der Linken gegen die Rechte, während das Eintheilen umgekehrt von der Rechten gegen die Linke geschieht. Nach jeder ausgesprochenen Klasse wird auch der Beiname hinzugefügt. Noch ist zu bemerken, daß in jeder Klasse die Einer stets vor den Zehnern und die Nullen gar nicht gelesen werden.

Demnach wird die Zahl 346″274,835′957,021 folgendermassen ausgesprochen: drei Hundert sechs und vierzig Billionen zwei Hundert vier und siebenzig Tausend acht Hundert fünf und dreißig Millionen neun Hundert sieben und fünfzig Tausend und ein und zwanzig.

c) Beim Anschreiben einer ausgesprochenen Zahl in Ziffern hat man dasselbe zu wissen, wie beim Aussprechen einer in Ziffern geschriebenen Zahl und ist nur theilweise umgekehrt zu verfahren. Man schreibe die Ziffern von der Linken gegen die Rechte in der Ordnung, in welcher sie ausgesprochen werden, mit der Ausnahme, daß die Zehner vor den Einern zu schreiben sind; setze für das Wort Tausend immer einen Strich unten, sowie für die Wörter Millionen, Billionen, Trillionen u. s. f. beziehungsweise 1, 2, 3 ..... Striche oben als Eintheilungszeichen. Hiebei muß man die Reihenfolge der Zifferstellen wohl im Gedächtnisse haben, da jede nicht ausgesprochene Zifferstelle mit einer Null zu besetzen ist. Z. B.

Fünf Tausend acht Hundert drei Billionen neun Hundert dreizehn Tausend zwei Hundert vier und siebenzig Millionen sieben Tausend drei Hundert acht und zwanzig.

Diese in Worten ausgedrückte Zahl wird in Ziffern geschrieben, wie folgt:

5,803''913,274'007,328.

d) Die Reihe aller denkbaren ganzen Zahlen von 1 an bis ins Unendliche, nämlich: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ....., von welchen jede um 1 größer ist als die nächst vorhergehende Zahl, nennt man die natürlichen Zahlen.

Uebungs=Aufgaben.

1) Folgende Zahlen sollen eingetheilt und ausgesprochen werden: 3645; 28573; 607409; 15970375; 3652710084; 83250408135; 238100084579; 1900007208372; 8132800507423; 35002141213 286590452189328953 2; 47240009802407; 625304051008320; 803208032572317 91; 7325932037204513 7935.

2) Nachstehende in Worten ausgedrückten Zahlen sollen in Ziffern geschrieben werden:

a) Sechs Tausend acht Hundert fünf und zwanzig.
b) Fünf und siebenzig Tausend zwei Hundert vierzehn.
c) Neun Hundert vier Tausend neun und dreißig.
d) Achtzehn Millionen sechs Tausend acht Hundert.
e) Zwei Tausend Millionen drei Hundert acht Tausend sieben und zwanzig.
f) Sechshundert Tausend fünf Hundert vier und vierzig Millionen sieben Hundert sechzehn Tausend ein Hundert acht.
g) Neunzehn Billionen fünf und fünfzig Tausend drei und zwanzig Millionen neun Hundert zwei Tausend und acht.
h) Vier Hundert fünf Trillionen drei Hundert acht Billionen sechzehn Tausend und vier Millionen sieben Hundert zwei Tausend und neunzehn.

§ 4.

Römische Zahlen.

Schwerfälliger und unbequemer als die arabischen Zahlen sind die römischen, welche von den Römern nach dem Dezimalsysteme mittels mehrerer Buchstaben ihres Alphabets geschrieben wurden

und heute noch von anderen Völkern manchmal, besonders in Inschriften, gebraucht werden. Es folgen nun römische Zahlen, welche mit den arabischen Zahlen von gleichem Werthe durch das Gleichheitszeichen verbunden sind:

I = 1, II = 2, III = 3, IV = 4, V = 5, VI = 6, VII = 7, VIII = 8, IX = 9, X = 10, XI = 11, XII = 12, XIII = 13, XIV = 14, XV = 15, XVI = 16, XVII = 17, XVIII = 18, XIX = 19, XX = 20, XXI = 21, XXII = 22, XXX = 30, XL = 40, L = 50, LX = 60, LXX = 70, LXXX = 80, XC = 90, C = 100, CX = 110, D = 500, M = 1000, MDCCCLXXIV = 1874.

Hieraus ist nun leicht ersichtlich, daß die Buchstaben I, V, X, L, C, D, M, die einfachen Zahlzeichen sind und aus diesen die übrigen Zahlen gebildet werden. Die Zahlzeichen werden theils additiv, theils subtraktiv zu einer beliebigen Zahl zusammengesetzt. Bei 2 neben einander stehenden ungleichen Zahlzeichen wird der kleinere Werth, wenn er links vom größeren steht, von diesem subtrahirt, wie in IV, IX, XL, XC, und wenn er rechts vom größeren ist, zu ihm addirt, wie in VI, XI, LX, CX.

Von den vier Rechnungsarten mit unbenannten (ganzen) Zahlen.

§ 5.

I. Addition.

1) Addiren heißt zwei oder mehrere Zahlen zu einer einzigen zusammensetzen, welche so viele Einheiten hat als die gegebenen Zahlen zusammen. Die gegebenen Zahlen heißen Summanden, die gesuchte Zahl Summe. Statt Addition sagt man auch Summe. Das Zeichen der Addition ist „+“, welches plus (mehr) genannt wird und die Summanden mit einander verbindet, z. B. 8 + 10, zu lesen: acht plus zehn.

2) Eine Zahl oder mehrere durch Zeichen mit einander verbundene Zahlen nennt man einen Zahlen-Ausdruck oder schlechtweg Ausdruck. Jeder zusammengesetzte Ausdruck kann auch als einfache Zahl betrachtet und behandelt werden.

3) Um anzuzeigen, daß zwei Zahlen-Ausdrücke einander gleich sind, verbindet man sie durch das Zeichen „=" mit einander, welches „gleich" gelesen wird und Gleichheitszeichen heißt, z. B. 7 + 9 = 16, zu lesen: sieben plus neun (sind) gleich sechzehn.

Zwei durch das Gleichheitszeichen mit einander verbundene Zahlen-Ausdrücke nennt man eine Gleichung.

Zwei oder mehrere Summanden bilden mit ihrer Summe immer eine Gleichung.

4) In einer Addition lassen sich die Summanden beliebig vertauschen, z. B. 4 + 3 = 3 + 4; denn die Ordnung der Summanden kann weder auf den Werth der Summanden, noch auf den der Summe einen Einfluß üben.

5) Um mehrere Zahlen zu addiren, sind zuerst zwei Summanden zu addiren, zu der erhaltenen Summe wird der dritte Summand addirt, zu der neuen Summe der vierte Summand u. s. f., bis auf diese Art nach und nach alle Summanden addirt sind.

6) Sind die Summanden mehrzifferige Zahlen, so schreibe man sie so unter einander, daß die gleichnamigen Stellen unter einander zu stehen kommen, also Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. f. und mache unter den untersten Summanden einen wagerechten Strich, addire hierauf zuerst alle Einer, dann die Zehner, darnach die Hunderter u. s. w.; denn es können nur Ziffern von gleichnamigen Stellen addirt werden. Hat die aus den Einern erhaltene Summe Einer und Zehner, so schreibe man die Einer unter die anderen Einer und addire die Zehner zu den anderen Zehnern. Ist die aus den Zehnern erhaltene Summe zweizifferig, so bedeutet die Ziffer rechts Zehner und ist deshalb diese Ziffer unter die Zehner zu schreiben, die linke Ziffer aber Hunderter und ist daher zu den Hundertern zu addiren u. s. w. Ueberhaupt, sind die aus den Einern, Zehnern, Hundertern u. s. w. erhaltenen Summen zweizifferig: so ist immer die Ziffer rechts gleichnamig mit den zuletzt addirten Ziffern und daher unter diese zu schreiben, dagegen die Ziffer links gleichnamig mit der nächst höheren Stelle links und deshalb dahin zu addiren. Z. B.

48346 + 7509 + 963 + 73858.

```
 48346
  7509
   963
 73858
  2212
------
130676
```

Die kleinen unter dem untersten Summanden befindlichen Ziffern bedeuten die zu den nächst höheren Stellen hinübergezählten Ziffern. Bezüglich der Probe siehe unten § 6. 15), 16), 17) und 18).

Uebungs-Aufgaben.

a) 4795 + 83452 + 5743 + 498;
b) 5987 + 384 + 72834 + 83430 + 597403;
c) 832 + 59203 + 50832 + 53471 + 8345;
d) 8542 + 87047 + 12374 + 9213 + 5078;
e) 94654 + 232487 + 2123 + 185297;
f) 730964 + 432659 + 5075932 + 16432;
g) 9832319 + 363 + 52307 + 9231 + 910832 + 193;
h) 103925 + 329734 + 19387 + 9385 + 18397368;
i) 2393495 + 2981003 + 523418 + 1639 + 987 + 23875;
k) 732456 + 987302 + 19345 + 9352132 + 35721089 + 1599;
l) 3254031 + 921083 + 62503 + 879 + 59 + 136457 + 1832819;
m) 632740 + 3928503 + 7290832 + 596 + 63986 + 7328164 + 76;
n) 6326328 + 180073 + 834503 + 5813928 + 9834 + 87329 + 7639572;
o) 15932816 + 763284 + 3284532 + 981 + 4395 + 193025 + 13900372.

§ 6.

II. Subtraction.

1) Subtrahiren heißt von einer gegebenen Zahl soviele Einheiten wegnehmen, als eine andere gegebene Zahl Einheiten hat. Die erstere Zahl heißt Minuend, die letztere Subtrahend und die übrig bleibende Zahl Differenz, auch Rest oder Unterschied.

Das Zeichen der Subtraction ist „—" und heißt minus (weniger), es verbindet den Minuenden mit dem Subtrahenden, z. B. 8 — 5, zu lesen: 8 minus 5. Verbindet man noch mit diesem Ausdrucke die Differenz durch das Gleichheitszeichen, so erhält man die Gleichung: 8 — 5 = 3, zu lesen: 8 minus 5 (ist) gleich 3. Hievon ist 8 der Minuend, 5 der Subtrahend und 3 die Differenz.

2) Sind zwei mehrzifferige Zahlen von einander zu subtrahiren, so schreibe man zuerst den Subtrahenden so unter den Minuenden, daß die gleichnamigen Stellen unter einander zu stehen kommen, also Einer und Einer, Zehner unter Zehner u. s. w., mache unter den Subtrahenden einen wagerechten Strich und subtrahire hierauf zuerst die Einer von einander, dann die Zehner, darnach die Hunderter u. s. w., überhaupt können nur die Ziffern der gleichnamigen Stellen von einander subtrahirt werden. Die erhaltenen Differenzen sind unter den Subtrahenden unterhalb des Striches zu schreiben.

Beispiel.

8697 — 5423

$$\begin{array}{r} 8697 \\ 5423 \\ \hline 3274 \end{array}$$

Hier 3 Einer von 7 Einern weggenommen, bleiben noch 4 Einer
2 Zehner von 9 Zehnern „ „ „ 7 Zehner
4 Hunderter von 6 Hundertern „ „ „ 2 Hunderter
5 Tausender von 8 Tausendern „ „ „ 3 Tausender.

Ist eine Ziffer des Minuenden kleiner als die unter ihr stehende gleichnamige Ziffer des Subtrahenden, so entlehne man zuerst für sie von der nächst höheren Stelle des Minuenden 1 Einheit, welche 10 Einheiten der fraglichen Stelle werth ist, und addire die 10 Einheiten zur fraglichen Stelle, worauf erst subtrahirt werden kann.

Das Entlehnen pflegt man durch einen Punkt anzudeuten, um anzuzeigen, daß die Ziffer, von welcher entlehnt wurde, um 1 Einheit weniger gilt.

Soll von der Null entlehnt werden, so ist zuerst für sie selbst bei der nächst höheren Stelle zu entlehnen, da die Null keine Einheit hat, alsdann kann erst von den für die Stelle der

Null erhaltenen 10 Einheiten 1 Einheit an die nächst niedrigere Stelle abgegeben werden, wornach für die Stelle der Null noch 9 Einheiten bleiben. Demnach wird aus jeder Null ein Neuner, nachdem bei ihr entlehnt wurde.

Beispiel.

80467 — 25849	8·0·46·7
	25849
	54618

Hier sind zuerst 9 Einer von 7 Einern zu subtrahiren; aber 9 lassen sich nicht wegnehmen, wo deren nur 7 sind, folglich ist bei der nächst höheren Stelle von den 6 Zehnern 1 Zehner zu entlehnen; der Zehner gilt aber 10 Einer, werden diese nun zu den schon vorhandenen 7 Einern addirt, so entstehen 17 Einer; von dieser Summe nun die 9 Einer des Subtrahenden abgezogen, bleiben 8 Einer.

Nach dem Entlehnen von den 6 Zehnern des Minuenden sind es nur noch 5 Zehner, von welchen nach Abzug der 4 Zehner des Subtrahenden noch 1 Zehner übrig bleibt.

Von den 4 Hundertern des Minuenden sind 8 Hunderter des Subtrahenden zu subtrahiren, was wieder erst nach dem Entlehnen geschehen kann; aus den 4 werden dann 14 Hunderter, davon 8 Hunderter subtrahirt, bleiben 6 Hunderter.

Durch das Entlehnen für die Null und wieder von dem dadurch Erhaltenen treten 9 Tausender an die Stelle der Null, davon 5 Tausender subtrahirt bleiben 4 Tausender.

Endlich 2 Zehntausender von den durch Entlehnung um einen verminderten 8 Zehntausendern subtrahirt, bleiben 5 Zehntausender.

3) Hat man von einer Zahl mehrere andere Zahlen zu subtrahiren, so subtrahire man zuerst von der Zahl den ersten Subtrahenden, dann von der erhaltenen Differenz den zweiten Subtrahenden, hierauf von der neuen Differenz den dritten Subtrahenden u. s. w.

Oder es kann noch kürzer dadurch geschehen, daß man alle Subtrahenden addirt und die erhaltene Summe von dem Minuenden subtrahirt.

4) Die Reihe der natürlichen Zahlen, welche in ihrer Aufeinanderfolge von der Linken gegen die Rechte immer um 1 zu-

nehmen von 1 bis ins Unendliche, kann auch rückwärts von der Rechten gegen die Linke fortgesetzt werden, so daß die Zahlen stets um 1 abnehmen. Nämlich: 1 weniger als 1 gibt 0, 1 weniger als 0 wird mit — 1 bezeichnet, 1 weniger als — 1 mit — 2, 1 weniger als — 2 mit — 3 u. s. w. Demnach hat man die natürliche Zahlenreihe mit ihrer rückwärtigen Fortsetzung, wie folgt: ..... — 12, — 11, — 10, — 9, — 8, — 7, — 6, — 5, — 4, — 3, — 2, — 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ....

5) Die Zahlen rechts von 0 gelten mehr als 0, sie haben entweder kein Vorzeichen oder das Pluszeichen und heißen positive Zahlen. Die Zahlen links von 0 gelten weniger als 0, sie erhalten deshalb das Minuszeichen und heißen negative Zahlen. Die Null ist also die Grenze zwischen den positiven und negativen Zahlen, welche Gegensätze zu einander bilden.

6) Ist bei einer Subtraktion der Minuend kleiner als der Subtrahend, wie z. B. in 4 — 7, so heißt dies, man solle hier von den 4 Einheiten des Minuenden 7 Einheiten wegnehmen; da aber nur 4 Einheiten weggenommen werden können, so bleiben noch 3 Einheiten des Subtrahenden zum Wegnehmen übrig und hat also der Minuend um 3 Einheiten weniger als erforderlich sind; deshalb erhält die Differenz 3 das Minuszeichen und ist daher 4 — 7 = — 3. Hieraus folgert sich die Regel:

Eine Subtraktion, deren Minuend kleiner ist als der Subtrahend, gibt eine negative Differenz.

7) Diese Regel findet ihre Bestätigung auch in der natürlichen Zahlenreihe mit ihrer rückwärtigen Fortsetzung aus negativen Zahlen. Denn will man z. B. 7 von 4 subtrahiren, so geht man in der natürlichen Zahlenreihe von 4 an um 7 Zahlen, einschließlich der Null, zurück nach links, dann ist die siebente Zahl die verlangte Differenz, nämlich — 3.

8) Mehrere positive Zahlen geben eine positive Summe und mehrere negative Zahlen eine negative Summe, z. B. 8 + 3 + 5 = 16; — 2 — 7 = — 9.

9) Ein Zahlenausdruck, dessen Theile theils durch „+“, theils durch „—“ mit einander verbunden sind, heißt ein Aggregat, z. B. 5 — 8 + 6 — 3. Die so mit einander verbundenen Theile nennt man die Glieder des Aggregates.

Die Glieder eines Aggregates können einfache Zahlen oder beliebig zusammengesetzte Ausdrücke sein.

10) Ein Aggregat wird berechnet, entweder

a) indem man die Glieder in der gegebenen Ordnung je nach ihren Vorzeichen miteinander verbindet; z. B. von 8 — 3 — 9 + 7 = 3 ist 8 — 3 = 5, dann 5 — 9 = — 4, endlich — 4 + 7 oder auch 7 — 4 = 3. Oder

b) wenn man die positiven, sowie auch die negativen Glieder addirt und die beiden erhaltenen Summen von einander subtrahirt; z. B. von 8 — 3 — 9 + 7 = 3 sind die positiven Glieder 8 + 7 = 15 und die negativen — 3 — 9 = — 12, nun beide Summen 15 und — 12 von einander subtrahirt, gibt 15 — 12 = 3.

Die letztere Methode ist meistens einfacher, besonders bei großen Aggregaten und deshalb vorzuziehen.

11) Aus den beiden Berechnungsarten des Aggregates lassen sich folgende Regeln entnehmen:

a) Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden addirt und die Summe erhält das Zeichen der Summanden.

b) Zwei Zahlen mit ungleichen Zeichen werden von einander subtrahirt und die Differenz erhält das Zeichen der größeren Zahl.

c) Zwei gleiche Zahlen mit ungleichen Zeichen geben Null.

d) Ein Aggregat ändert seinen Werth nicht, wenn man die Glieder sammt ihren Zeichen beliebig versetzt, da die Ordnung der Glieder weder auf den Werth der Glieder, noch auf den des Aggregates einen Einfluß üben kann.

12) Nach der Erklärung der Subtraktion ist der Subtrahend die vom Minuenden wegzunehmende und die Differenz die übrig bleibende Zahl; daher hat man den Minuenden als eine Summe von zwei Summanden zu betrachten, von welchen der eine Summand der Subtrahend und der andere die Differenz ist. Hieraus folgern sich die 2 nachstehenden Regeln:

a) Von einer Summe den einen Summanden subtrahirt gibt den anderen Summanden.

b) Die Differenz zum Subtrahenden addirt gibt den Minuenden.

Auf der zweiten Regel beruht die Probe für die Subtraktion.

13) Behufs der Probe ziehe man nach vollzogener Subtraktion unterhalb der Differenz einen wagerechten Strich, addire die Differenz zum Subtrahenden, so muß, wenn kein Rechnungsfehler gemacht wurde, der Minuend resultiren, wie nachstehendes Beispiel zeigt:

38426 — 25762

38426
25762
12664
38426

14) Die Addition und Subtraktion stehen im Gegensatze zu einander, d. h. was durch die eine verbunden wurde, wird durch die andere wieder aufgelöst. Daher dienen auch beide Rechnungsarten sich gegenseitig zur Probe.

15) Die Probe für die Addition gründet sich auf den Satz: „Von einer Summe den einen Summanden subtrahirt gibt den andern Summanden" [siehe 12)].

16) Zur Probe einer Addition von zwei Summanden subtrahire man von der Summe den einen Summanden, so muß der andere Summand herauskommen; z. B. für 8 + 6 = 14 ist die Probe: 14 — 8 = 6, oder: 14 — 6 = 8.

17) Enthält die Addition mehr als 2 Summanden, so subtrahire man behufs der Probe von der Summe einen beliebigen Summanden, von dem erhaltenen Reste einen anderen Summanden, von dem neuen Reste wieder einen der noch übrigen Summanden und fahre in dieser Weise so lange fort, bis der letzte Summand als Rest herauskommt. Subtrahirt man den letzten Summanden auch noch, so muß der Rest Null werden; denn es versteht sich wohl von selbst, daß, wenn von der Summe nach und nach alle Summanden subtrahirt sind, nichts mehr übrig bleiben kann.

Beispiel.	Addition.	Probe.
	12	183
	75	12
	32	171
	64	75
	183	96
		32
		64
		64
		0

18) Die Probe läßt sich auch dadurch ausführen, daß man alle Summanden außer einem beliebigen addirt und die erhaltene Summe von der Summe aller Summanden subtrahirt, worauf der bei der Addition ausgelassene Summand resultiren muß.

Beispiel.

Addition.	Probe.	
12	75	
75	32	
32	64	183 — 171 = 12.
64	171	
183		

Uebungs=Aufgaben.

Man führe folgende Subtraktionen aus:

a) 4832 — 2611	f) 70472 — 58038	l) 273204 — 189457
b) 9758 — 8427	g) 43082 — 26984	m) 1832845 — 98732
c) 8031 — 6428	h) 50089 — 48326	n) 942347 — 9574
d) 8403 — 6594	i) 832745 — 700889	o) 632579 — 896
e) 94813 — 82081	k) 630214 — 382952	p) 842832 — 74328.

Man berechne nachstehende Aggregate:

a) 9 — 3 + 8 — 5	f) 4 — 3 + 10 — 6 + 8
b) 12 — 6 — 2 + 5	g) 11 — 5 — 3 + 7 — 12
c) 25 — 12 + 5 — 7	h) 15 — 10 + 2 — 7 — 3
d) 6 + 7 — 9 + 4 — 8	i) 20 — 11 — 3 + 8 — 16
e) 7 — 8 + 5 — 9 + 15	k) 3 — 5 + 10 — 9 — 6

l) 6 + 8 — 20 — 7 — 4
m) 18 — 2 — 5 + 8 — 8 + 9
n) 17 — 3 + 8 + 7 — 9 — 1 + 16
o) 9 — 18 + 12 — 3 + 6 + 12 + 20
p) 24 + 8 — 15 — 13 + 30 — 19 — 11.

§ 7.

III. Multiplication.

1) **Multipliciren** heißt eine gegebene Zahl so oft als Summanden setzen, als eine andere gegebene Zahl Einheiten hat. Die erste Zahl heißt **Multiplicand**, die zweite **Multiplicator** und jede auch **Factor**, das Resultat nennt man **Product**. Statt Multiplication sagt man auch Product.

Das Zeichen der Multiplication ist „×" oder ein Punkt, es verbindet den Multiplicanden mit dem Multiplicator und wird „mal" ausgesprochen, z. B. 8 × 6 oder 8 . 6, zu lesen: 6 mal 8.

2) Die Multiplikation ist eine kürzere Form für eine Addition von lauter gleichen Summanden sowohl im Schreiben als auch in der Ausführung. Denn bei einer Summe von lauter gleichen Summanden, wie z. B. bei $6 + 6 + 6 + 6 = 6 \times 4$, genügt es zum richtigen Verständnisse, denselben Summanden nur einmal zu schreiben, wenn man ihm seine Anzahl, in welcher er vorhanden ist, als Faktor beisetzt. Dies umgekehrt genommen, nämlich $6 \times 4 = 6 + 6 + 6 + 6$, gibt den obigen Begriff der Multiplikation.

Anmerkung. Mit der kürzeren Schreibweise hat sich auch eine kürzere Ausführung verbunden, da man aus 6×4 das Produkt 24 durch eine einzige Verbindung erhält, während aus $6 + 6 + 6 + 6$ dasselbe Resultat erst allmählig durch mehrere nach einander folgenden Verbindungen zu Stande kommt.

Die kürzere Ausführung, durch welche sich die Multiplikation vor der Addition auszeichnet, gründet sich darauf, daß zunächst mit den neun einzifferigen Zahlen durch Multiplikation alle möglichen Verbindungen von je zweien derselben hergestellt wurden, aus den hiedurch erhaltenen Produkten eine Tabelle, das sogenannte Einmaleins, angelegt und dieselbe von dem Schüler dem Gedächtnisse eingeprägt wurde, um vorkommenden Falles bequem gebraucht zu werden.

Die in der Tabelle des Einmaleins verzeichneten Produkte wurden dadurch gewonnen, daß man die Multiplikation auf die ursprüngliche Form der Addition zurückführte und auf diesem bekannten Wege zum Resultate gelangte. Es sei z. B. für die Multiplication 8×5 das Produkt zu finden, so ist nach dem Begriffe der Multiplikation der Multiplikand 8 so oft als Summand zu setzen, als der Multiplikator 5 Einheiten hat, also $8 \times 5 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8$; wird jetzt diese Addition ausgeführt, so erhält man 40 als das verlangte Resultat.

3) **Die Faktoren einer Multiplikation lassen sich unbeschadet des Werthes vertauschen**, z. B. $9 \times 5 = 5 \times 9$.

Denn nach dem Begriffe der Multiplikation ist $9 \times 5 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45$; durch Vertauschung der beiden Faktoren von 9×5 erhält man $5 \times 9 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 45$, also dasselbe Resultat aus 5×9, wie vorher aus 9×5.

4) Manchmal soll ein größerer Ausdruck als eine einfache Zahl, gleichsam wie sein Resultat, betrachtet und behandelt werden, in diesem Falle setzt man ihn in Klammern „()“.

5) Sind für einen in Klammern gesetzten Ausdruck die

Klammern bedeutungslos geworden, so kann man sie wieder weglassen, wenn kein Minuszeichen davor steht.

6) Bildet ein mehrgliedriger Ausdruck einen Faktor eines Produktes, so ist er immer in Klammern einzuschließen.

7) Eine Summe wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man jeden Summanden mit der Zahl multiplicirt und die erhaltenen Produkte addirt; z. B. $(5 + 7) \times 4 = 5 \times 4 + 7 \times 4 = 20 + 28$.

Denn nach dem Begriffe der Multiplikation soll hier der Multiplikand $(5 + 7)$ viermal als Summand gesetzt werden, also:

$$(5 + 7) \times 4 = (5 + 7) + (5 + 7) + (5 + 7) + (5 + 7),$$

nach Weglassung der Klammern erhält man:

$$(5 + 7) \times 4 = 5 + 7 + 5 + 7 + 5 + 7 + 5 + 7,$$

durch Versetzung der Glieder:

$$(5 + 7) \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5 + 7 + 7 + 7 + 7,$$

hier steht sowohl 5 als auch 7 viermal als Summand, folglich kann man nach 2) auch kürzer in Multiplikations-Form schreiben:

$$(5 + 7) \times 4 = 5 \times 4 + 7 \times 4.$$

Für die Ausführung der Multiplikation nach obiger Regel möge hier noch ein Biespiel Platz finden:

$$(8 + 2) \times 7 = 8 \times 7 + 2 \times 7 = 56 + 14 = 70,$$

oder kürzer unter Weglassung des Entbehrlichen:

$$(8 + 2) \times 7 = 56 + 14 = 70.$$

8) Eine Differenz wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man sowohl den Minuenden als auch den Subtrahenden mit der Zahl multiplicirt und vom ersten Produkte das zweite subtrahirt; z. B.

$$(9 - 4) \times 3 = 9 \times 3 - 4 \times 3 = 27 - 12 = 15.$$

Denn nach der Erklärung der Multiplikation ist hier der Multiplikand $(9 - 4)$ dreimal als Summand zu setzen, nämlich:

$$(9 - 4) \times 3 = (9 - 4) + (9 - 4) + (9 - 4),$$

nach Weglassung der Klammern ist

$$(9 - 4) \times 3 = 9 - 4 + 9 - 4 + 9 - 4,$$

in einem Aggregate lassen sich die Glieder sammt ihren Zeichen beliebig vertauschen [§ 6. 11) d)], daher kann man die Glieder mit gleichen Zeichen zusammen stellen und erhält dann:

$$(9 - 4) \times 3 = 9 + 9 + 9 - 4 - 4 - 4,$$

hier kommt sowohl 9 als auch — 4 dreimal als Summand vor, folglich ist nach 2):

$$(9 - 4) \times 3 = 9 \times 3 - 4 \times 3.$$

9) **Ein Produkt wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man den einen Faktor mit der Zahl multiplizirt und das erhaltene Produkt mit dem anderen Faktor;** z. B. $(4 \times 3) \times 5 = 15 \times 4 = 60.$

Denn nach der Erklärung der Multiplikation soll der Multiplikand, hier (4×3), fünfmal als Summand gesetzt werden, also:

$$(4 \times 3) \times 5 = (4 \times 3) + (4 \times 3) + (4 \times 3) + (4 \times 3) + (4 \times 3),$$

nun setze man ebenso innerhalb der Klammern 4 dreimal als Summand, dann ist

$$(4 \times 3) \times 5 = (4 + 4 + 4) + (4 + 4 + 4) + (4 + 4 + 4) + (4 + 4 + 4) + (4 + 4 + 4),$$

nach Weglassung der Klammern:

$$(4 \times 3) \times 5 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4,$$

nun steht 4 fünfzehnmal als Summand, was sich kürzer in Multiplikations-Form ausdrücken läßt, dann ergibt sich:

$$(4 \times 3) \times 5 = 4 \times 15,$$

oder nach Vertauschung der Faktoren:

$$(4 \times 3) \times 5 = 15 \times 4.$$

10) **Eine Multiplikation von mehreren Faktoren wird ausgeführt, wenn man zuerst zwei Faktoren mit einander multiplizirt, dann das erhaltene Produkt mit dem dritten Faktor, das neue Produkt mit dem vierten u. s. w., bis nach und nach mit allen Faktoren multiplizirt ist;** z. B. $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 4 \times 3 \times 5 \times 7 = 12 \times 5 \times 7 = 60 \times 7 = 420.$

11) Will man eine Zahl mit 10, 100, 1000 u. s. w. multiplizieren, so soll sie dadurch beziehungsweise einen 10 mal, 100 mal, 1000 mal u. s. w. größeren Werth erhalten; dies wird erreicht, wenn man der Zahl rechts beziehungsweise 1 Null, 2 Nullen, 3 Nullen u. s. w. anhängt. Denn in Folge dieser angehängten Nullen rückt jede Ziffer der Zahl um eben so viele Stellen weiter

links, als Nullen angehängt sind, und erhält sie sonach auch einen 10 mal, 100 mal, 1000 mal u. s. w. größeren Lokalwerth, mithin auch die ganze Zahl einen eben so vielmal größeren Werth.

Demnach wird eine Zahl mit 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicirt, wenn man ihr rechts so viele Nullen anhängt, als der Multiplicator Nullen hat.

Beispiele.

a) 387 × 10 = 3870 d) 8 × 10,000 = 80,000
b) 52 × 100 = 5200 e) 49 × 100,000 = 4'900,000
c) 8214 × 1000 = 8'214,000 f) 343 × 1000,000 = 343'000,000

12) Umgekehrt, befinden sich an einer Zahl rechts eine oder mehrere Nullen, so ist sie durch Multiplication aus zwei Faktoren zusammengesetzt, von welchen der eine die Zahl ohne die Nullen, der andere 10, 100, 1000 oder 10000 u. s. w ist, und läßt sich daher auch wieder in die nämlichen Faktoren zerlegen.

Beispiele.

a) 450 = 45 × 10 d) 94'570,000 = 9457 × 10000
b) 98100 = 981 × 100 e) 58'200,000 = 582 × 100,000
c) 15000 = 15 × 1000 f) 7'000,000 = 7 × 1000,000

13) Zwei Zahlen, von welchen eine oder beide rechts Nullen haben, werden mit einander multiplicirt, wenn man die Zahlen ohne die Nullen mit einander multiplicirt und dem erhaltenen Produkte die weggelassenen Nullen noch anhängt.

Denn z. B. von 60 × 900 kann man 60 in 6 × 10 und 900 in 9 × 100 zerlegen, wornach

60 × 900 = 6 × 10 × 9 × 100 ist, oder nach 3):
= 6 × 9 × 10 × 100 „ „ „ 10) u. 11):
= 54000.

14) Das Verfahren, eine zwei- oder mehrzifferige Zahl mit einer einzifferigen zu multipliciren, läßt sich auf Grund von 7) in folgender Weise entwickeln:

Es sei z. B. 348 mit 6 zu multipliciren, so ist 348 = 300 + 40 + 8 und 348 × 6 = (300 + 40 + 8) × 6. Hier ist eine Summe mit einer Zahl zu multipliciren; nach 7) und 13) erhält man:

(300 + 40 + 8) × 6 = 1800 + 240 + 48 = 2088.

Dies kann man auch unter einander statt neben einander schreiben und behandeln, wie folgt:

			a		b
8	$\times$ 6	=	48	=	48
40	$\times$ 6	=	240	=	24
300	$\times$ 6	=	1800	=	18
348	$\times$ 6	=	2088	=	2088

Die unter a stehenden Produkte 48, 240 und 1800 nennt man Partialprodukte (Theilprodukte) zum Unterschiede von dem Totalprodukte 2088, worunter man die Summe der Partialprodukte versteht.

Läßt man die rechts befindlichen Nullen der Partialprodukte unter a weg, ohne deßwegen die übrigen Ziffern von ihren Stellen zu verrücken, so bleibt der Lokalwerth der Ziffern von den Partialprodukten, sowie der Werth des Totalproduktes gewahrt und ergibt sich hiedurch die Darstellung unter b.

Aus der Darstellung nnter b läßt sich leicht ersehen, daß man das nämliche auch erhält, wenn man jede Ziffer des Multiplicanden 348 mit dem Multiplicator 6 von der Rechten gegen die Linke multiplicirt, die Partialprodukte nach dem Lokalwerthe ihrer Ziffern unter einander schreibt, da selbstverständlich bei dem Multip.iciren der Einer wieder Einer, der Zehner wieder Zehner, der Hunderter wieder Hunderter ꝛc. sich ergeben, und dann addirt.

Werden in obiger Darstellung unter b die 4 Zehner von 48 und die zwei Hunderter von 24 nicht sogleich mit angeschrieben, sondern immer zum nächstfolgenden Produkte gezählt: so lassen sich die dabei anzuschreibenden Ziffern neben einander statt unter einander setzen und erhält man hiedurch g eich unmittelbar das Totalprodukt 2088, wie das nachstehende Beispiel zeigt, in welchem der Multip.icator 6 unter dem Multiplicanden 348 steht:

$$\begin{array}{r} 348 \\ 6 \\ \hline 2088 \end{array}$$

Hieraus hat man folgendes kürzere und allgemein übliche Verfahren:

Eine mehrzifferige Zahl wird mit einer einzifferigen multiplicirt, indem man jede Ziffer jener Zahl von der Rechten gegen die Linke mit der einzifferigen Zahl multi-

plicirt, von jedem Partialprodukte die Ziffer rechts sogleich anschreibt und zwar unter die jeweils multiplicirte Ziffer und die links befindliche Ziffer zur nächst höheren Stelle zählt.

15) Das Verfahren, zwei mehrzifferige Zahlen mit einander zu multipliciren, wird durch folgende Entwicklung gefunden:

Z. B. von 648 × 987 zerlege man die eine Zahl, etwa 987 in 900 + 80 + 7, dann ist 987 = 900 + 80 + 7 und 648 × 987 = 648 × (900 + 80 + 7). Hier soll eine Zahl mit einer Summe nach 7) und 13) multiplicirt werden, darnach ist 648 × (900 + 80 + 7) = 583200 + 51840 + 4536 = 639576.

Dies läßt sich auch unter- statt nebeneinander schreiben, wie folgt, und in analoger Weise betrachten und behandeln wie in 14), also:

		a		b
648 × 7	=	4536	=	4536
648 × 80	=	51840	=	5184
648 × 900	=	583200	=	5832
648 × 987	=	639576	=	639576

Bei genauerer Betrachtung dieser ganzen Darstellung findet man, daß die 3 Partialprodukte unter b dadurch entstanden sind, daß jede Ziffer des Multiplicanden 648 zuerst mit den 7 Einern, dann mit den 8 Zehnern und hierauf mit den 9 Hundertern des Multiplicators 987 multiplicirt wurde; daß ferner das zweite Partialprodukt um eine Stelle und das dritte um zwei Stellen von der Rechten zur Linken eingerückt erscheint; und daß endlich die so unter einander stehenden Partialprodukte addirt wurden. Daraus ergibt sich nun folgende Regel:

Zwei mehrzifferige Zahlen werden mit einander multiplicirt, wenn man von der Rechten zur Linken jede Ziffer des Multiplicanden mit jeder Ziffer des Multiplicators multiplicirt, die Partialprodukte so unter einander schreibt, daß jede Anfangsziffer unter diejenige Ziffer des Multiplicators zu stehen kommt, mit welcher jeweils multiplicirt wird, und hierauf die Partialprodukte so addirt, wie sie unter einander geschrieben sind.

Multiplicand und Multiplicator werden zum Multipliciren

meistens unter einander geschrieben, und wird unter den Multiplicator ein wagerechter Strich gemacht. Z. B.

```
    5408 × 2637
    2637
 ────────
   37856
  16224
 32448
10816
 ────────
14260896
```

16) Kommen zwischen den Ziffern des Multiplicators Nullen vor, so erhält man durch das Multipliciren mit jeder Null eine Reihe von lauter Nullen als Partialprodukt, von welchen nur die Anfangs-Null, oder auch diese nicht, geschrieben zu werden braucht. An den dadurch leer gewordenen Raum kann dann das nächste Partialprodukt treten, so daß in Folge dessen jedes nachfolgende Partialprodukt jedesmal um eine Reihe aufwärts rückt und die Rechnung um eben soviel weniger Raum einnimmt. Um dies zu veranschaulichen ist ein und dieselbe Multiplication einmal mit allen vorkommenden Nullen und einmal auch unter Weglassung derselben dargestellt, wie folgt:

```
     4572 × 200706              4572 × 200706
   200706                     200706
 ─────────                  ─────────
    27432                      27432
    0000                     32004
  32004                     9144
  0000                      ─────────
 0000                       917627832
9144
 ─────────
917627832
```

17) Zwei- oder mehrzifferige Zahlen durch 11 mit Vortheil zu multipliciren:

a) Eine zweizifferige Zahl wird mit 11 am kürzesten multiplicirt, wenn man die beiden Ziffern der Zahl addirt und die erhaltene Summe zwischen die beiden Ziffern der Zahl setzt; die dadurch entstandene dreizifferige Zahl ist das gesuchte Produkt, z. B. 36 × 11 = 396.

Ist die erhaltene Summe zweizifferig, so setzt man bloß ihre Einerziffer zwischen die beiden Ziffern der

Zahl und zählt die Zehnerziffer zur linken Ziffer der Zahl, z. B. 48 × 11 = 528.

b) Eine mehrzifferige Zahl wird mit 11 am kürzesten multiplicirt, wenn man zur ersten Ziffer rechts die Null, dann jede Ziffer zu ihrer nächsten links und die letzte zur Null addirt, sowie das nebenbei vorkommende Einzählen von einer Stelle zur nächst höheren mitberücksichtigt, z. B. 38564 × 11 = 424204.

Die kürzere Methode der vorstehenden 2 Fälle ist in der Schreibweise der gewöhnlichen Methode begründet und bei genauerer Betrachtung leicht aus den nachstehenden drei Beispielen nach gewöhnlicher Methode zu entnehmen, indem von den beiden gleichen Partialprodukten je zwei solche Ziffern zum Addiren unter einander stehen, welche im Multiplicanden unmittelbar nach einander folgen.

Beispiele.

a. 45 × 11	á. 79 × 11	b. 87695 × 11
11	11	11
45	79	87695
45	79	87695
495	869	964645

Probe der Multiplication siehe § 8. 16).

Uebungs-Aufgaben.

a) 48 × 7
b) 36 × 54
c) 507 × 24
d) 958 × 734
e) 2074 × 387
f) 8005 × 897
g) 90308 × 438
h) 64003 × 8256
i) 230842 × 1493
k) 809078 × 8316
l) 6003084 × 4389
m) 4508 × 604
n) 9072 × 8052
o) 160038 × 5009
p) 47037 × 20806
q) 83043 × 60075
r) 9005602 × 9600308
s) 2700903 × 4070085
t) 70803948 × 500409
u) 94005086 × 530007008
v) 630 × 840
w) 7900 × 80
x) 6200 × 4900
y) 382000 × 45000
z) 4805000 × 7000
aa) 150000 × 2800
ab) 3870000 × 470000
ac) 54000 × 63800000
ad) 70060000 × 30600
ae) 360007 × 80090000
af) 9005000 × 7005
ag) 49378 × 11
ah) 70395 × 11
ai) 49006 × 11
ak) 6070507 × 11
al) 900064000 × 11
am) 579040 × 1100
an) 9060500 × 11000
ao) 89739000 × 1100
ap) 905703000 × 10000

§ 8

IV. Division.

1) Dividiren heißt eine Zahl suchen, welche angibt, wie oft in einer gegebenen Zahl eine andere gegebene Zahl enthalten ist. Die erstere der gegebenen Zahlen heißt Dividend, die letztere Divisor (Theiler) und die gesuchte Zahl Quotient. Quotient sagt man auch statt Division.

Das Zeichen der Division ist der Doppelpunkt „:", es verbindet den Dividenden mit dem Divisor, wobei dieser rechts von jenem steht, z. B. 12:4. Ein zweites Divisionszeichen ist ein Strich „—", Bruchstrich genannt; über diesem steht der Dividend und unter ihm der Divisor. Diese Divisionsform heißt die Bruchform, z. B. $\frac{12}{4}$.

Die Division steht im Gegensatze zur Multiplication, d. h. die eine löst die Verbindung der anderen auf.

Die Division ist eine durch die Multiplication vermittelte kürzere Form für eine öfter zu wiederholende Subtraktion mit ein und demselben Subtrahenden; denn dividiren heißt angeben, wie oft der Divisor im Dividenden enthalten ist; dies ist aber gleichbedeutend mit „angeben, wie oft der Divisor vom Dividenden sich subtrahiren läßt." Z. B. bei $27:3 = 9$ kann der Divisor 3 von dem Dividenden 27 neunmal subtrahirt werden.

2) Aus der Erklärung der Division geht hervor, daß Quotient und Divisor multiplikativ zu einander stehen, daher läßt sich der Begriff der Division mit anderen Worten auch so geben (als zweite Erklärung):

Dividiren heißt eine Zahl suchen, welche mit dem Divisor multiplicirt den Dividenden gibt.

Demnach ist der Dividend als ein Produkt von zwei Faktoren anzusehen, von welchen der eine der Divisor und der andere die gesuchte Zahl oder der Quotient ist. Hieraus ergeben sich folgende zwei Regeln:

a) Der Quotient mit dem Divisor multiplicirt gibt den Dividenden.

b) Ein Produkt durch den einen Faktor dividirt gibt den andern Faktor.

3) Eine Summe wird durch eine Zahl dividirt, wenn man jeden Summanden mit der Zahl dividirt nnd die

erhaltenen Quotienten addirt; z. B. $(12 + 15 + 18) : 3 = \frac{12}{3} + \frac{15}{3} + \frac{18}{3} = 4 + 5 + 6$.

Denn nach der zweiten Erklärung heißt dividiren eine Zahl suchen, welche mit dem Divisor multiplicirt den Dividenden gibt. Multiplicirt man in vorstehendem Beispiele die Summe der Quotienten $4 + 5 + 6$ mit dem Divisor 3, so erhält man $(4 + 5 + 6) \times 3 = 12 + 15 + 18$, also den Dividenden $12 + 15 + 18$; folglich muß das Resultat $4 + 5 + 6$ richtig sein.

4) Eine Differenz wird durch eine Zahl dividirt, wenn man sowohl den Minuenden als auch den Subtrahenden durch die Zahl dividirt und vom ersten Quotienten den zweiten subtrahirt; z. B. $(20 - 8) : 4 = \frac{20}{4} - \frac{8}{4} = 5 - 2$.

Zum Beweise multiplicire man nach der zweiten Erklärung der Division das Ergebniß $5 - 2$ mit dem Divisor 4, so ergibt sich $(5 - 2) \times 4 = 20 - 8$, somit der Dividend $20 - 8$.

5) Ein Produkt wird durch eine Zahl dividirt, wenn man den einen Faktor durch die Zahl dividirt und den erhaltenen Quotienten mit dem anderen Faktoren multiplicirt; z. B. $(12 \times 3) : 2 = (\frac{12}{2}) \times 3 = 6 \times 3$.

Denn der Quotient (6×3) mit dem Divisor 2 multiplicirt gibt $(6 \times 3) \times 2 = 12 \times 3$, d. h. den Dividenden 12×3.

6) Ein Quotient wird durch eine Zahl dividirt, entweder wenn man den Dividenden durch die Zahl dividirt und den hiedurch erhaltenen Quotienten durch den Divisor dividirt, z. B. $(\frac{24}{3}) : 4 = (\frac{24}{4}) : 3 = 6 : 3$; oder wenn man den Divisor mit der Zahl multiplicirt und durch das erhaltene Produkt den Dividenden dividirt, z. B.

$$(\tfrac{24}{3}) : 4 = \frac{24}{3 \times 4} = \tfrac{24}{12}.$$

Der Beweis gründet sich auf die zweite Erklärung der Division.

7) Eine Zahl wird durch ein Produkt dividirt, wenn man die Zahl zuerst durch den einen Faktor dividirt und den erhaltenen Quotienten noch durch den anderen; z. B.

$$\frac{36}{2 \times 6} = (\tfrac{36}{2}) : 6 = 18 : 6.$$

Zu begründen durch die zweite Erklärung der Division.

Wie ein Quotient mit einer Zahl multiplicirt, oder wie eine Zahl durch einen Quotienten dividirt wird ꝛc., darüber siehe später bei den Brüchen § 37 und § 47.

8) Manche Zahlen sind der Art zusammen gesetzt, daß zu einem Produkte noch eine Zahl addirt ist, welche kleiner als ein Faktor ist. Dividirt man eine solche Zahl durch den einen Faktor des in ihr enthaltenen Produktes, so läßt sich keine (ganze) Zahl finden, welche mit dem Divisor multiplicirt den Dividenden gäbe. Nimmt man den anderen Faktor als Quotienten, so gibt das Produkt aus diesem und dem Divisor eine Zahl, welche den Dividenden nicht ganz erreicht. Der Ueberschuß des Dividenden ist die oben erwähnte, zum Produkte addirte Zahl und wird beim Dividiren mit Rest bezeichnet. Der Rest ist immer kleiner als der Divisor, sonst wäre der Divisor öfter im Dividenden enthalten, als der Quotient angibt.

9) Eine Zahl wird durch eine einzifferige Zahl dividirt, wie folgt: Es sei z. B. 7672 durch 3 zu dividiren, so schreibe man den Dividenden in Form einer Summe, nämlich 7672 = 7000 + 600 + 70 + 2, und dividire diese Summe durch 3.

Eine Summe wird durch eine Zahl dividirt [nach 3)], indem man jedes Glied der Summe durch die Zahl dividirt und die erhaltenen Quotienten addirt. Dabei schreibe man aber den Quotienten von den 7 Tausendern nur in Tausendern, von den 6 Hundertern nur in Hundertern, von den 7 Zehnern nur in Zehnern und von den 2 Einern nur in Einern, wenn auch in Folge dessen der Rest größer wird als der Divisor.

A

```
(7000 + 600 + 70 + 2):3 = 2000 + 500 + 50 + 7
 6000
 ----
 1000 + 600 = 1600
              1500
              ----
               100 + 70 = 170
                          150
                          ---
                           20 + 2 = 22
                           21
                           --
                            1
```

B

```
7672:3=2557
6
--
16
15
--
 17
 15
 --
  22
  21
  --
   1
```

Hier 7 Tausend dividirt durch 3 gibt nach der zweiten Erklärung der Division und nach 3) den Quotienten 2 Tausend (bloß in Tausendern, ohne die Werthe den niedrigeren Stellen): 2 Tausend × 3 sind aber gleich 6 Tausend, folglich bleibt von 7 Tausend noch der Rest 1 Tausend. 1 Tausend = 10 Hundert, dieser Rest kann, da er noch nicht dividirt ist, sammt dem nächsten Gliede 6 Hundert dividirt werden, nachdem man ihn zu demselben addirt hat, dadurch werden 16 Hundert aus den 6 Hundert.

16 Hundert dividirt durch 3 gibt 5 Hundert, 3 × 5 Hundert sind 15 Hundert, 15 Hundert von 16 Hundert subtrahirt bleibt noch der Rest 1 Hundert. 1 Hundert = 10 Zehnern, diese zum nächsten Gliede, zu den 7 Zehnern addirt macht 17 Zehner.

17 Zehner durch 3 dividirt gibt 5 Zehner, 3 × 5 Zehner sind 15 Zehner, verbleiben also noch 2 Zehner als Rest. 2 Zehner sind gleich 20 Einern, diese zum nächsten und letzten Gliede 2 addirt gibt 22 Einer.

22 Einer dividirt durch 3 gibt 7 Einer, 3 × 7 Einer sind 21 Einer, verbleibt noch 1 Einer als Rest.

Addirt man in obiger Division unter A die Glieder sowohl des Dividenden als auch des Quotienten; läßt man ferner die Additionen links von den Gleichheitszeichen sammt diesen ganz weg und schreibt man bloß ihre Summen rechts von den Gleichheitszeichen und zwar an die Stellen der Reste; läßt man endlich von den noch bleibenden Zahlen die rechts befindlichen Nullen weg, so stellt sich die Division wie unter B dar.

Diese Schreibweise unter B ist wegen ihrer Einfachheit allgemein üblich geworden und geschieht die Ausführung der Division ganz einfach in folgender mehr mechanischen Weise von der Linken gegen die Rechte:

Man dividirt vom Dividenden die erste Ziffer links nämlich 7 durch 3, dies gibt 2 als erste Ziffer des Quotienten, 2 × 3 = 6, 6 unter 7 geschrieben und subtrahirt bleibt 1. Nun setzt man rechts neben diesen Rest 1 die nächste Ziffer 6 vom Dividenden herab und erhält 16.

Dann dividirt man die Zahl 16 durch 3, dies gibt 5 als zweite Ziffer des Quotienten, 5 × 3 = 15, 15 von 16 subtrahirt

bleibt 1; neben diesen Rest die nächste Ziffer 7 vom Dividenden herabgesetzt, so erhält man 17.

17 durch 3 dividirt gibt 5 als dritte Ziffer des Quotienten, $5 \times 3 = 15$, 15 von 17 subtrahirt bleiben 2; neben diesen Rest 2 die nächste und letzte Ziffer 2 vom Dividenden herabgesetzt macht 22.

Endlich 22 dividirt durch 3 gibt 7 als vierte Ziffer des Quotienten, $7 \times 3 = 21$, 21 von 22 subtrahirt bleibt der Rest 1.

10) Für eine Division mit einem mehrzifferigen Divisor ist das Verfahren ganz dasselbe wie für einen einzifferigen Divisor, was nachstehendes Beispiel zeigt:

$$\begin{array}{l} 1839457 : 8562 = 214. \\ \underline{17124} \\ \;\;12705 \\ \;\;\;\underline{8562} \\ \;\;\;41437 \\ \;\;\;\underline{34248} \\ \;\;\;\;\;7189 \end{array}$$

Das Verfahren für jede beliebige Division läßt sich sonach in folgender Regel ausdrücken:

Man dividire vom Dividenden links so viele Ziffern, als Eine Zahl betrachtet, durch den Divisor, als dieser Ziffern hat, und, wenn jene Ziffern nicht ausreichen, noch um eine mehr; multiplicire die dadurch erhaltene erste Ziffer des Quotienten mit dem Divisor, schreibe das Produkt unter die erwähnten Ziffern des Dividenden und subtrahire; setze rechts neben den Rest die nächste Ziffer vom Dividenden herab und dividire den so vergrößerten Rest durch den Divisor, wodurch man die zweite Ziffer des Quotienten erhält; multiplicire dieselbe mit dem Divisor, subtrahire das Produkt von dem vorigen vergrößerten Rest und setze dieses Verfahren so lange fort, bis nach und nach alle Ziffern des Dividenden zum Rest herabgesetzt und dividirt sind.

11) Eine Zahl wird durch 10, 100, 1000 ꝛc. dividirt, wenn man rechts vom Dividenden so viele Ziffern abschneidet, als der Divisor Nullen hat; die noch übrigen Ziffern links bilden den Quotienten und die abgeschnittenen Ziffern den Rest.

Denn durch das Dividiren z. B. mit 10 soll eine Zahl gefunden werden, welche 10 mal kleiner ist als der Dividend. Der Dividend wird aber 10 mal kleiner, wenn man jeder seiner Ziffern einen 10 mal kleineren Lokalwerth gibt und zwar durch Versetzung einer jeden Ziffer von der Linken gegen die Rechte. Diese Versetzung wird aber bewerkstelligt, wenn man die letzte Ziffer des Dividenden wegnimmt oder, was dasselbe bedeutet, abschneidet. Analog sind die Folgerungen für die Divisoren 100, 1000, 10000 ꝛc.

Beispiele.

48(3 : 10 = 48
78(93 : 100 = 78
5(873 : 1000 = 5
81(2374 : 10000 = 81
193(27489 : 100000 = 193.

12) Eine Division, deren Divisor eine beliebige Zahl mit rechts angehängten Nullen ist, wird einfacher ausgeführt, wenn man sowohl die angehängten Nullen vom Divisor als auch ebenso viele Ziffern rechts vom Dividenden abschneidet und bloß mit den noch übrigen Ziffern dividirt, worauf rechts neben den letzten Rest auch noch die vom Dividenden abgeschnittenen Ziffern zu setzen sind.

Dieses Verfahren gründet sich auf 7), da der Divisor ein Produkt ist aus der Zahl links vor den Nullen und der Einheit mit so vielen Nullen, als solche der Divisor hat; so ist z. B. $74583 : 6000 = 74583 : (1000 \times 6)$.

Der Dividend wird also hier zuerst durch 1000 und der erhaltene Quotient noch durch 6 dividirt. Folgendes Beispiel diene zur Veranschaulichung:

```
74583 : 6000 = 74(583 : 6(000 = 12.
               6
               ——
               14
               12
               ————
               2583
```

13) Eine Zahl wird am kürzesten mit 25 multiplicirt, wenn man ihr rechts 2 Nullen anhängt und sie dann durch 4 dividirt; z. B. $937 \times 25 = 93700 : 4 = 23425$.

Denn durch das Anhängen zweier Nullen wurde die Zahl mit 100 multiplicirt [§ 7, 11)], 100 ist aber 4 mal größer als

25, folglich muß das 4 mal zu groß gewordene Produkt noch durch 4 dividirt werden.

14) Eine Zahl wird am kürzesten durch 25 dividirt, wenn man sie mit 4 multiplicirt und von dem Produkte die letzten 2 Ziffern rechts abschneidet; z. B. 7654:25 = 306(16.

Denn durch das Multipliciren mit 4 wurde die Zahl 4 mal größer und muß deßwegen durch einen 4 mal größeren Divisor, d. i. durch 100 dividirt werden mittels Abschneidens der letzten 2 Ziffern [11)].

15) Zur Probe einer Division hat man nach 2)a) den Quotienten mit dem Divisor zu multipliciren und zum Produkte noch den Rest zu addiren [8)], wodurch man den Dividenden erhalten muß.

16) Behufs der Probe einer Multiplication dividire man das Produkt durch den einen Faktor, so muß nach 2)b) der andere Faktor als Quotient erscheinen.

Uebungs-Aufgaben.

a) 6354:3
b) 17395:7
c) 35927:9
d) 57308:12
e) 19008:48
f) 87305:79
g) 39049:238
h) 634492:873
i) 945732:798
k) 851238:4937
l) 6326153:8746
m) 42575245:9395
n) 57983428:18374
o) 46003285:69875
p) 98321463:86957
q) 832657:500
r) 539582:8000
s) 192748:360
t) 3650273:75000
u) 85932872:65800
v) 945728328: 7250000
w) 592008732826:5874000000
x) 324595826:783700.

Zweiter Abschnitt.

Von den benannten (ganzen) Zahlen.

Vom Reduciren.

§ 9.

Bei der Eintheilung der Maße, Gewichte, Münzen ꝛc. sind der Größe nach Einheiten verschiedener Ordnungen zu unterscheiden, von welchen immer eine bestimmte Anzahl gleicher Einheiten eine

größere Einheit und somit eine neue Ordnung bildet. Die Einheiten von verschiedenen Ordnungen haben auch verschiedene Benennungen, wie Jahre, Monate, Tage, Stunden ꝛc.; oder wie Kilogramm, Hektogramm, Dekagramm, Gramm ꝛc.; oder wie Mark und Pfennige.

Das Reduciren ist von doppelter Art:

a) Einheiten höherer Ordnungen in Einheiten niedrigerer Ordnung und umgekehrt

b) Einheiten niedrigerer Ordnung in Einheiten höherer Ordnungen zu verwandeln.

Das Reduciren der ersten Art wird durch Multiplikation und das der zweiten Art durch Division ausgeführt und zwar mittels der Eintheilungs- oder Reductionszahlen, welche angeben, wie viele Einheiten einer Ordnung zu einer Einheit einer höheren Ordnung erforderlich sind.

Beim Multipliciren darf nur der eine Faktor eine Benennung haben, der andere Faktor muß eine unbenannte Zahl sein; denn man kann nicht sagen „4 Pfund × 7 Mark", oder „3 Liter × 5 Kilo", da es keinen Sinn gibt; wohl aber „4 × 7 Mark", oder „3 × 5 Kilo".

§ 10.

a) Reduktion von Einheiten höherer Ordnungen auf Einheiten niedrigerer Ordnung (Resolviren).

Um z. B. 6 Jahre 5 Monate 16 Tage 12 Stunden in lauter Stunden zu verwandeln, sind zuerst die 6 Jahre in Monate zu verwandeln, indem man sie mit 12 multiplicirt; denn 1 Jahr hat 12 Monate, folglich geben 6 Jahre 6 × 12 Monate, d. i. 72 Monate, zu welchen noch die gegebenen 5 Monate zu addiren sind, worauf man 77 Monate hat.

Nun werden die 77 Monate auf Tage reducirt, indem man sie mit 30 multiplicirt; denn 1 Monat hat durchschnittlich 30 Tage, daher geben 77 Monate 77 × 30 Tage oder 2310 Tage, zu welchen noch die gegebenen 16 Tage kommen, wodurch man 2326 Tage erhält.

Enlich müssen die 2326 Tage noch in Stunden verwandelt werden, indem man sie mit 24 multiplicirt; denn 1 Tag hat 24 Stunden, somit haben 2326 Tage 2326 × 24 Stunden, dies

gibt 55824 Stunden und mit den gegebenen 12 Stunden nun 55836 Stunden.

Daher sind 6 Jahre 5 Monate 16 Tage und 12 Stunden gleich 55836 Stunden.

Diese Aufgabe stellt sich nun dar, wie folgt:

A

```
Jahre   Monate   Tage   Stunden
  6       5       16      12
× 12
----
 72  +  5  =  77 Monate
             × 30
             ----
             2310 + 16 = 2326 Tage
                         ×  24
                         ------
                          9304
                         4652
                         ------
                         55824 + 12 = 55836 St.
```

B

```
Jhr.   Mon.   Tg.   Std.
 6      5     16    12
12
---
77 Mon.
30
----
2326 Tg.
  24
-----
 9316
4652
-----
55836 Std.
```

Aus der Darstellung unter A entsteht die kürzere und deßhalb gebräuchlichere unter B, wenn man die gegebenen 5 Monate 16 Tage und 12 Stunden nicht erst als Summanden zu den Produkten schreibt, sondern sogleich schon beim Multipliciren im Kopfe einzählt, wodurch auch die Gleichheitszeichen entbehrlich werden.

Daraus folgt die Regel:

Einheiten einer höheren Ordnung oder von verschiedenen höheren Ordnungen werden in Einheiten niedrigerer Ordnung verwandelt, wenn man die Einheiten der höchsten gegebenen Ordnung zuerst in die der nächst niedrigeren Ordnung verwandelt, indem man sie mit der entsprechenden Reductionszahl multiplicirt und

zum Produkte die etwa schon gegebenen gleichnamigen Einheiten addirt; hierauf das Erhaltene wieder in die nächst niedrigere Ordnung durch Multiplication mit der entsprechenden Reductionszahl verwandelt und zum Produkte die etwa schon gegebenen gleichnamigen Einheiten addirt, und dieses Verfahren so lange fortsetzt, bis man auf die Einheiten der gewünschten Ordnung gekommen ist.

§ 11.

Von den metrischen Maßen und Gewichten, sowie auch von den ö. W. Münzen sind die Reductionen viel einfacher und erhält man die Resultate mechanisch fast ohne Rechnung, was in der Eigenthümlichkeit der Reduktionszahlen 10, 100, 1000 liegt.

Es seien z. B. 8 Meter 4 Dezimeter 7 Centimeter und 5 Millimeter in lauter Millimeter zu verwandeln, so erhält man nach dem gewöhnlichen obigen Verfahren 8475 Millimeter. Dieses Resultat erhält man aber auch, wenn man die vier gegebenen Zahlen nach ihrer Reihenfolge bloß neben einander als eine einzige Zahl schreibt und als Benennung die verlangte niedrigste der gegebenen Maße beisetzt.

Für den Fall, daß zwischen den gegebenen Maß-Ordnungen eine oder mehrere Ordnungen fehlen, sind diese im Resultate durch Nullen zu ergänzen. Hat man z. B. 5 Hektoliter 8 Liter 3 Milliliter in lauter Milliliter zu verwandeln, so sind, da zwischen den gegebenen Ordnungen die Dekaliter, Deziliter und Centiliter fehlen, dieselben im Resu tate mit je einer Null zu besetzen und erhält man 508003 Milliliter.

Auf jede Ordnung eines Maßsystems treffen beim Reduciren im Resultate immer so viele Zifferstellen, als die zugehörige Reductionszahl Nullen hat. Die Meter-, Liter- und Armaße, sowie die Grammgewichte haben 10 als Reduktionszahl; die Quadratmaße 100 und die Kubikmaße 1000.

Das Gesagte läßt sich nun zu folgender Regel zusammenfassen:

Sind beim Reduciren von Einheiten höherer Ordnungen auf Einheiten einer niedrigeren Ordnung die Reductionszahlen 10, 100 oder 1000, so setze man die Zahlen der gegebenen Ordnungen nach ihrer Reihenfolge bloß neben einander zu einer einzigen Zahl, räume sowohl

jeder gegebenen als auch jeder dazwischen fehlenden Ordnung so viele Zifferstellen im Resultate ein, als die zugehörige Reduktionszahl Nullen hat, ergänze die fehlenden Zifferstellen durch Nullen und gebe dem Resultate die Benennung der verlangten Ordnung.

Hiezu folgen noch Beispiele mit den üblich abbrevirten Benennungen (siehe Abbreviaturen im Anhange):

a) 9 Kg 6 g 2 cg 3 mg = 9006023 mg.
b) 18 □Hm 7 □Dm 36 □dm 8 □mm = 180700360008 □mm.
c) 358c^{Km} 14c^{m} 4c^{cm} 543c^{mm} = 358000000014000004543c^{mm}
d) 54 Mark 75 Pfennige = 5475 Pfennigen.

§ 12.

b) Reduction von Einheiten einer Ordnung auf Einheiten höherer Ordnungen (Reduciren im engeren Sinne).

Sind z. B. 88697 Minuten in Stunden, Tage und Monate zu verwandeln, so dividire man sie durch 60, wodurch man 1478 Stunden und als Rest 17 Minuten erhält; denn 60 Minuten geben 1 Stunde und so oft 60 Minuten in 88697 Minuten enthalten sind, so viele Stunden erhält man.

Um die 1478 Stunden in Tage zu verwandeln, dividire man sie durch 24; denn 24 Stunden geben 1 Tag und so oft 24 Stunden in 1478 Stunden enthalten sind, so viele Tage werden daraus; es resultiren 61 Tage und bleiben 14 Stunden übrig.

Die 61 Tage werden auf Monate reducirt, wenn man sie durch 30 dividirt; denn 30 Tage geben 1 Monat, so oft also 30 Tage in 61 Tagen enthalten sind, so viele Monate erhält man; es ergeben sich 2 Monate und bleibt 1 Tag übrig.

Somit sind 88697 Minuten gleich 2 Monaten 1 Tage 14 Stunden und 17 Minuten.

Dieses Reductionsbeispiel ist durch nachstehende 3 Divisionen repräsentirt:

```
Minuten: 8869)7 : 6(0 = 1478 Stunden
         6               Stunden
         ‾28             1478 : 24 = 61 Tage
          24             144                  Tage
          ‾46            ‾‾38                 6(1 : 3(0 = 2 Mon.
           42              24                 6
           ‾49             ‾14 Stunden        ‾1Tag
            48
           ‾17 Min.
```

88697 Minuten = 2 Monaten 1 Tage 14 Stunden 17 Minuten.

Daraus ergibt sich nun folgende Regel:

Einheiten einer Ordnung werden in Einheiten höherer Ordnungen verwandelt, wenn man die Einheiten der gegebenen Ordnung durch die entsprechende Reduktionszahl dividirt, wodurch Einheiten der nächst höheren Ordnung entstehen; hierauf die Einheiten dieser neuen Ordnung wieder mittels Division durch die zugehörige Reduktionszahl auf die nächst höhere Ordnung reduzirt und dieses Verfahren so lange fortsetzt, bis man das angestrebte Ziel erreicht hat. Die Reste dieser Divisionen und der letzte Quotient bilden das verlangte Resultat. Jeder Rest hat stets die Benennung seines Dividenden.

§ 13.

Am einfachsten, mechanisch und fast ohne Rechnung lassen sich die Resultate von den Reduktionen der metrischen Maße und Gewichte, so wie auch der deutschen Reichsmünzen mit den Reduktionszahlen 10, 100 oder 1000 finden (§ 11).

Es seien z. B. 65324 Centigramm in die Einheiten der verschiedenen höheren Ordnungen zu verwandeln. Führt man die Reduktion auf die gewöhnliche Art aus und vergleicht das Resultat mit der Angabe, so zeigt sich, daß das nämliche Resultat sich auch ergibt, wenn man die gegebene Zahl der Centigramm in lauter einzifferige Klassen etwa mittels Striche von der Rechten zur Linken eintheilt, die erste Klasse rechts mit Centigramm, die zweite mit Dezigramm, die dritte mit Gramm rc. bezeichnet.

Diese Aufgabe stellt sich sodann folgendermaßen dar:

6|5|3|2|4 Centigramm = 6 Hektogramm 5 Dekagramm 3 Gramm
2 Dezigramm 4 Centigramm.

Ist die Reduktionszahl 100 mit zwei Nullen, wie bei den Quadratmaßen, so ist die gegebene Zahl in lauter zweizifferige Klassen, und bei der Reduktionszahl 1000 mit drei Nullen, wie beim Kubikmaße, in lauter dreizifferige Klassen einzutheilen, wie nachstehende Beispiele zeigen:

a) 870|5|6|2|4 dm. = 870 Km. 5 Hm. 6 Dm. 2 m. 4 dm.

b) 7|26|59|02|71 □cm. = 7 □Hm. 26 □Dm. 59 □m.
2 □dm. 71 □cm.

c) 9|408|326|518 c^{mm} = 9 c 408 c^{dm} 326 c^{cm} 518 c^{mm}

d) 458|76 Reichspfennige = 458 Mark 76 Pfennigen.

Demnach werden Einheiten einer Ordnung mit den Reduktionszahlen 10, 100 oder 1000 auf Einheiten höherer Ordnungen reduzirt, wenn man die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in lauter Klassen von je so vielen Zifferstellen eintheilt, als die zugehörige Reduktionszahl Nullen hat; hierauf der ersten Klasse rechts den Namen der gegebenen Ordnung und den übrigen Klassen die Namen derjenigen Ordnungen gibt, welche es nach steigender Reihenfolge trifft.

§ 14.

A. Uebungs-Aufgaben.

Man reduzire folgende Einheiten verschiedener Ordnungen auf die Einheiten der niedrigsten von den gegebenen Ordnungen:

Alte Maßsysteme (siehe die Eintheilungen im Anhange).

a. 1) 6 Jahre 8 Monate 26 Tage 15 Std. 34 Min. 54 Sekd.
2) 15 Jhr. 9 Tg. 16 Std. 57 Min.
3) 7 Mon. 27 Tg. 45 Min. 48 Sek.
4) 24 Tg. 17. Std. 37 Sek.
5) 38 Jhr. 21 Std. 42 Sek.
6) 3 Mon. 12 Tg. 32 Min.

b. 1) 18 Ballen 6 Ries 15 Buch 12 Bogen Schreibpapier
2) 9 Bll. 8 Rs 18 Bch. Schreibpapier.
3) 5 Rs. 14 Bch. 17 Bg. "
4) 26 Bll. 18 Bch. 24 Bg. Druckpapier.
5) 15 Bll. 5 Rs. 15 Bg. "
6) 7 Rs. 13 Bch. 16 Bg. "

c. 1) 35 Tagwerk 57 Dezimalen 3 □Ruthen 68 □Fuß.
2) 46 Tgw. 48 Dez. 2 □°
3) 17 Tgw. 1 □°
4) 27 Dez. 2 □° 88 □'
5) 14 Tgw. 75 □°
6) 68 Tgw. 15 □'

d. 1) 18 fl. 24 kr. 3 pf. 1 hl.
2) 36 fl. 48 kr. 2 pf.
3) 42 fl. 3 pf. 1 hl.
4) 20 fl. 15 kr. 2 pf.
5) 12 fl. 56 kr. 3 pf.
6) 25 fl. 33 kr. 1 hl.

e. 1) 8 Ctr. 75 Pfd. 17 Lth. 3 Qu.
2) 36 Ctr. 32 Pfd. 27 Lth.
3) 14 Ctr. 83 Pfd. 2 Qu.

f. 1) 48 Eimer 45 Maß 1 Seidel 1 Quart.
2) 30 Eim. 15 Mß. 3 Qu.
3) 5 Eim. 8 Mß. 2 Qu.

g. 1) 8 Scheffel 5 Metzen 3 Viertel.
2) 24 Sch. 4 M. 2 V.
3) 18 Sch. 2 M. 1 V.

h. 1) 8° 5′ 11″ 7‴ dd.
2) 11° 8′ 9‴
3) 6° 4′ 10″.

Neue Maßsysteme.

i. 1) 4 Km 8 Hm 7 Dm 5 m 3 dm 9 cm 2 mm.
2) 5 Hm 3 Dm 4 m 5 dm 8 cm.
3) 7 Dm 5 m 1 dm. 3 cm.
4) 4 m 7 dm. 8 cm 5 mm.
5) 8 Km 2 Hm 7 m.
6) 4 Km 6 m 5 cm.
7) 7 Hm 3 m 2 dm.
8) 2 Km 3 Dm 5 dm.
9) 4 m 6 cm 9 mm.
10) 8 Km 4 m 8 cm.

k. 1) 15 □Km 12 □Hm 75 □Dm. 6 □m 25 □dm 3 □cm 48 □mm.
2) 46 □Km 8 □Hm 19 □Dm 5 □m.
3) 28 □Hm 83 □m 9 □dm 48 □cm.
4) 50 □Dm 63 □m 16 □cm.
5) 47 □m 15 □dm 7 □cm. 8 □mm.
6) 68 □dm 9 □cm 35 □mm.
7) 57 □Hm 18 □m 1 □dm.
8) 6 □Km 45 □Dm 7 □m.
9) 25 □Km 46 □m 2 □dm.
10) 8 □m 5 □mm.

l. 1) $48c^{Km}$ $326c^{Hm}$ $62c^{Dm}$ $4c^{m}$ $17c^{dm}$ $723c^{cm}$ $936c^{mm}$.
2) $54c^{Km}$ $18c^{Hm}$ $9c^{Dm}$ $830c^{m}$
3) $839c^{Hm}$ $49c^{m}$ $728c^{cm}$
4) $40c^{Dm}$ $24c^{m}$ $87c^{mm}$.
5) $6c^{m}$ $90c^{dm}$ $813c^{cm}$ $5c^{mm}$.
6) $908c^{Km}$ $45c^{Dm}$.
7) $16c^{Hm}$ $15c^{m}$ $8c^{dm}$.
8) $4c^{Dm}$ $14c^{m}$ $36c^{cm}$.
9) $27c^{dm}$ $8c^{cm}$ $500c^{mm}$.
10) $35c^{m}$ $543c^{dm}$ $4c^{cm}$.

m. 1) 5 Ka 6 Ha 7 Da 9 a 4 da 3 ca 1 ma.
2) 6 Ka 5 Ha 3 Da 7 a 2 da.
3) 8 a 4 ca 7 ma.
4) 3 Ha 9 a 2 da
5) 4 Da 1 a 5 ca.
6) 2 da 3 ca 8 ma

n. 1) 8 Kl 4 Hl 2 Dl 5 l 3 dl 8 cl. 7 ml.
2) 3 Hl 8 Dl 4 l 3 dl 5 cl.
3) 4 Dl 3 l 1 dl 8 cl.
4) 5 Hl 2 l 4 dl.
5) 9 l 5 cl 3 ml.
6) 2 Kl 4 l 3 dl 5 ml.

o. 1) 4 Kg 7 Hg 2 Dg 5 g 8 dg 1 cg 9 mg.
2) 5 g. 9 dg 4 cg. 8 mg.
3) 1 Hg 3 Dg 4 g 9 cg.
4) 2 Dg 5 dg 3 cg.
5) 15 Kg 4 g. 2 dg.
6) 24 Kg 2 Hg 7 g.

p. 1) 8 Ballen 7 Ries 4 Buch 2 Heft 9 Bogen.
2) 7 Bll. 5 Rs. 9 Bch. 6 Hft 1 Bg.
3) 5 Bll. 2 Rs. 4 Bch. 3 Hft. 2 Bg.
4) 6 Bll. 9 Bch. 5 Bg.
5) 15 Bll. 3 Hft. 8 Bg.
6) 5 Rs. 9 Hft.

§ 15.

B. Uebungs-Aufgaben.

Man reduzire die nachstehenden Einheiten einer gegebenen Ordnung auf die Einheiten verschiedener höheren Ordnungen:

Alte Maße.

a. 1) 42'835,037 Sekunden. 2) 574,321 Sekunden.
3) 959,826 Minuten. 4) 8438 Stunden.
5) 934 Tage. 6) 2483 Minuten.

b. 1) 28034 Bogen Schreibpapier 2) 9458 Bg. Schreibpap.
3) 4573 Bg. Schreibpapier. 4) 189 Ries Druckpap.
5) 645 Buch Druckpapier. 6) 283 Bg. Druckpapier.

c. 1) 835,645 □'. 2) 45723 □°.
3) 7324 Dezimalen. 4) 9521 □'.
5) 1247 □°. 6) 8439 □'.

d. 1) 5735 Heller. 2) 94573 Heller.
3) 573 Kreuzer. 4) 6726 Pfennige.
5) 37 Pfennige. 6) 735 Pfennige.

e. 1) 47521 Quint. 2) 5738 Quint.
3) 6942 Loth. 4) 45734 Loth.
5) 7935 Quint. 6) 18393 Quint.

f. 1) 5437 Quart. 2) 365 Quart.
3) 1578 Seidel. 4) 237 Seidel.
5) 6123 Quart. 6) 536 Maß.

g. 1) 6743 Mäßel. 2) 5438 Viertel.
3) 736 Viertel. 4) 213 Mäßel.
5) 381 Metzen. 6) 175 Viertel.

h. 1) 7385''' dd. 2) 643'''.
3) 839''. 4) 14735'''.
5) 634''. 6) 357'.

Neue Maße.

i. 1) 9'457,382 mm. 2) 57634 mm.
3) 7653 m. 4) 3473 Dm.
5) 321045 dm. 6) 7584 cm.
7) 150032 mm. 8) 8347 m.
9) 5003 cm. 10) 34208 dm.

k. 1) 834''578,302'518,093 □mm. 2) 934'003,804 □mm.
3) 4'738,156 □cm. 4) 143'000,827 □cm.
5) 834,247 □dm. 6) 2,385'675,261 □m.
7) 572'855,003 □Dm. 8) 38'345,621 □dm.
9) 310,000'645,703 □mm. 10) 3,026'256,184 □m.

l. 1) 300'''345,183''045,613'276,295c^{mm}.
2) 5''938,002'894,573c^{cm}.
3) 80,004'571,573c^{dm}.
4) 4,572'378,515c^{Dm}.
5) 8,304'281,325c^{m}.
6) 81''432,855'845,832c^{m}.
7) 63'450,238c^{dm}.
8) 6''500,003'008,020c^{mm}.
9) 45'000,036c^{mm}.
10) 4''008,328'003,204c^{cm}.

m. 1) 5832745 ma. 2) 65034 ma.
3) 17345 a. 4) 6003 Da.
5) 80504 ca. 6) 8070043 da.

n. 1) 3458146 ml. 2) 50034 cl.
3) 630482 dl. 4) 583841 l.
5) 43028 ml. 6) 154893 Dl.

o. 1) 6304589 mg. 2) 945836 g.
3) 64328 Dg. 4) 724058 cg.
5) 873005 mg. 6) 170038 dg.

p. 1) 7492 Bogen. 2) 923 Heft.
3) 12809 Bogen. 4) 807 Buch.
5) 20032 Heft. 6) 160708 Bogen.

Von den vier Rechnungsarten mit benannten Zahlen.

I. Addition benannter Zahlen.

§ 16.

Mehrere gleichartige Systeme von Maßen, Gewichten oder Münzen werden addirt, wenn man sie zuerst so unter einander schreibt, daß nur die gleichnamigen Ordnungen unter einander zu stehen kommen, hierauf die Zahlen der niedrigsten Ordnung, dann die der nächst höheren Ordnung u. s. w. addirt, bis die Addition bei allen Ordnungen vollzogen ist. Dabei wird die Summe einer jeden Ordnung auf die Einheiten der nächst höheren Ordnung reducirt, der Rest unter die jedesmal zuletzt addirten, mit ihm gleichbenannten Zahlen geschrieben und der Quotient zur nächst höheren Ordnung addirt.

Man habe z. B. folgende drei unter einander geschriebenen Zeitmaß-Systeme zu addiren:

Jahre	Monate	Tage	Stunden
12	8	26	23
8	6	8	18
45	10	17	20
67	1	23	13

so sind zuerst die Stunden zu addiren, die Summe ist 61 Stunden, welche 2 Tage und 13 Stunden geben; die 13 Stunden sind unter die Stunden-Summanden zu schreiben und die 2 Tage zu den Tag-Summanden zu addiren.

Aus der Addition der Tage resultiren 53 Tage, welche sich auf 1 Monat und 23 Tage reduziren, wovon die 23 Tage wieder unter die Tag-Summanden zu schreiben sind und der Monat bei der Addition der Monat-Summanden einzuzählen ist. So verfährt man auch mit den Monaten und Jahren.

§ 17.

Uebungs-Aufgaben.

1) Als ein Knabe in die Lehre trat, war er 14 Jahre 5 Monate 16 Tage 21 Stunden alt; als Lehrling lernte er 3 Jahre

11 Mon. 24 Tg. 22 Std., als Gesell brachte er 12 Jhr. 7 Mon. 18 Tg. 15 Std. zu, als Meister lebte er noch 32 Jhr. 6 Mon. 7 Tg. 8 Std. Wie alt wurde er?

2) Ein Verbrecher war viermal im Gefängnisse: das erste Mal 2 Jahre 6 Monate 24 Tage 13 Stunden 36 Minuten, das zweite Mal 3 Jhr. 4 Mon. 16 Tg. 18 Std. 58 Min., das dritte Mal 4 Jhr. 9 M. 6 Tg. 17 Std. 8 Min., das vierte Mal 6 Jhr. 11 Mon. 21 Tg. 7 Std. 9 Min. Wie lange war er im Ganzen eingesperrt?

3) Von 5 Geschwistern ist Karl 6 Jahre 4 Monate 25 Tage 17 Stunden alt, Joseph um 3 Jhr. 8 Mon. 15 Std. älter, Bertha um 2 Jhr. 7 Mon. 19 Tg. 5 Std. älter als Joseph, Katharina um 3 Jhr. 4 Mon. 9 Tg. 20 Std. älter als Bertha und endlich Fritz um 1 Jhr. 8 Mon. 27 Tg. 9 Std. älter als Katharina. Wie alt ist jedes?

4) Ein Gelehrter verfaßte 3 Werke: zum Drucke des ersten waren 5 Ballen 4 Ries 6 Buch 9 Heft 2 Bogen nöthig, das zweite erforderte 4 Bll. 8 Rs. 8 Bch. 4 Hft. 9 Bgn., das dritte 1 Bll. 9 Rs. 5 Bch. 7 Hft. 3 Bg. Wieviel Papier war für alle 3 Werke nöthig?

5) In einer Kanzlei wurden im Jahre 1870 6 Ballen 5 Ries 4 Buch 3 Heft 8 Bogen Papier verbraucht, im Jahre 1871 5 Bll. 8 Rs. 9 Bch. 3 Hft. 2 Bg., im Jahre 1872 4 Bll. 3 Rs. 7 Bch. 5 Hft. 6 Bg., im Jahre 1873 5 Bll. 6 Rs. 2 Bch. 3 Hft. 7 Bg. und im Jahre 1874 6 Bll. 2 Rs. 1 Bch. 4 Hft. 2 Bg. Wie groß war der Papierverbrauch in der Zeit von 5 Jahren?

6) Zu einem aus drei Bänden bestehenden Werke waren folgende Papierquantitäten erforderlich: zum ersten Bande 2 Ballen 8 Ries 5 Buch 1 Heft 9 Bogen, zum zweiten Bande 3 Bll. 2 Rs. 8 Bch. 5 Hft. 4 Bg. und zum dritten Bande 3 Bll. 5 Rs. 3 Bch. 8 Hft. 4 Bg. Wieviel Papier war zum ganzen Werke erforderlich?

7) Ein Landmann hat folgende Grundstücke: 2 Tagwerk 86 Dezimalen 3 □Ruthen Ackerfeld, 5 Tgw. 54 Dez. 2 □° Wiesengrund, 4 Tgw. 20 Dez. 3 □° Moorgrund, 7 Tgw. 24 Dez. 2 □° Waldung und 76 Dez. 1 □° Krautgarten. Wie groß ist der ganze Grundbesitz?

8) Ein Bauer hat von seinen Aeckern 8 Tagwerk 72 Dezi-

malen 3 □Ruthen mit Weizen angesäet, 7 Tgw. 88 Dez. mit Dinkel, 5 Tgw. 12 Dez. 2 □° mit Roggen, 6 Tgw. 40 Dez. 3 □° mit Gerste, 9 Tgw. 27 Dez. 2 □° mit Haber und 1 Tgw. 36 Dez. 3 □° mit Kartoffeln. Welche Flächenausdehnung haben diese Grundstücke zusammen?

9) Sieben Oekonomen besitzen eine Waldung: davon gehören dem A 8 Tagwerk 56 Dezimalen 3 □Ruthen, dem B 10 Tgw. 97 Dez., dem C 24 Tgw. 48 Dez., dem D 2 Tgw. 18 Dezim. 2 □°, dem E 4 Tgw. 65 Dez. 3 □°, dem F 19 Tgw. 36 Dez. und dem G 3 Tgw. 33 Dez. 2 □°. Wie groß ist die ganze Waldung?

10) Ein Student hatte in einem Monate verschiedene Ausgaben: für Kost 61 Mark 75 Pfennige, für Logie 10 ℳ, für einen Rock 32 ℳ 50 ₰, für Stiefel 13 ℳ 75 ₰, für Bier 7 ℳ 24 ₰ und für andere diverse Bedürfnisse 5 ℳ 45 ₰. Wie hoch beliefen sich seine Ausgaben?

11) Jemand erhielt folgende Neujahrs-Rechnungen: vom Schuhmacher machte sie 43 ℳ 45 ₰, vom Schneider 54 ℳ 65 ₰., vom Schlosser 26 ℳ 15 ₰, vom Maurermeister 68 ℳ 35 ₰, vom Schreiner 18 ℳ 25 ₰, vom Arzte 47 ℳ und vom Apotheker 72 ℳ 72 ₰. Wieviel hatte er im Ganzen zu bezahlen?

12) Eine Hausfrau machte für den häuslichen Bedarf mehrere Einkäufe: für nachgeschaffte Küchengeräthe gab sie 8 ℳ 85 ₰ aus, für Mehl 25 ℳ 75 ₰, für Schmalz 12 ℳ 15 ₰, für Eier 5 ℳ 40 ₰, für Kartoffeln 18 ℳ 30 ₰, für Erbsen 4 ℳ 25 ₰., für Gerste 5 ℳ 70 ₰ und endlich für Reis 6 ℳ 55 ₰. Wie hoch belief sich die Summe ihrer Ausgaben?

13) Jemand setzte auf 2 Nummern 4 mal nach einander in eine Lotterie und zwar das erste Mal 1 fl. 12 kr. 3 pf., das zweite Mal 2 fl. 25 kr. 2 pf., das dritte Mal 4 fl. 51 kr. und das vierte Mal 9 fl. 42 kr. Wie groß ist die Summe dieser Einsätze?

14) Wie groß ist die Summe von folgenden vier Posten: 574 fl. 42 kr. 3 pf. 1 hl., 6738 fl. 15 kr. 1 pf. 1 hl., 2717 fl. 36 kr. 2 pf., 573 fl. 55 kr. 3 pf. 1 hl. und 48 fl. 45 kr. 3 pf.?

15) Wie groß ist der Umfang eines Gartens, von welchem die erste Seite 1 Hm. 2 Dm. 7 m. 8 dm. lang ist, die zweite 4 Dm. 5 m. 9 dm., die dritte 1 Hm. 3 Dm. 2 m. 5 dm. und die vierte 5 Dm. 2 m. 8 dm.?

16) Die Länge eines Bahnkörpers beträgt von der ersten bis zur zweiten Station 8 Km. 3 Hm. 7 Dm. 8 m. 5 dm., von der zweiten bis zur dritten Station 7 Km. 8 Hm. 5 Dm. 3 m. 6 dm., von der dritten bis zur vierten Station 8 Km. 1 Hm. 6 Dm. 9 m. 8 dm. und von der vierten bis zur fünften Station 6 Km. 9 Hm 4 Dm. 2 m. 7 dm. Wie weit ist es von der ersten bis zur fünften Station?

17) Ein Bauer hat einen Weizen-, Roggen- und Haberacker: der Weizenacker hält 1 □Hm. 35 □Dm. 96 □m., der Roggenacker 2 □Hm. 45 □Dm. 24 □m. und der Haberacker 1 □Hm. 12 □Dm. 72 □m. Welchen Flächenraum haben die 3 Aecker zusammen?

18) Von vier Zimmerböden faßt der erste 26 □m. 18 □dm. 75 □cm., der zweite 19 □m. 26 □dm 39 □cm., der dritte 25 □m. 7 □dm. 98 □cm. und der vierte 28 □m. 59 □dm. 67 □cm. Wieviel betragen sämmtliche Bodenflächen zusammen?

19) In einer Wohnung faßt der Salon $96c^{m}$ $78c^{dm}$ $437c^{cm}$, das Wohnzimmer $86c^{m}$ $748c^{dm}$ $926c^{cm}$, das Schlafzimmer $78c^{m}$ $66c^{dm}$ $843c^{cm}$, das Arbeitszimmer $82c^{m}$ $652c^{dm}$ $236c^{cm}$ und das Kindszimmer $88c^{m}$ $728c^{dm}$ $427c^{cm}$. Wie groß ist der Gesammt-Kubikinhalt von allen 5 Zimmern?

20) Eine Stadt hat 3 Wasserleitungs-Reservoirs: das östlich gelegene faßt $2c^{Dm}$ $536c^{m}$ $832c^{dm}$, das südliche $2c^{Dm}$ $12c^{m}$ $745c^{dm}$ und das westliche $1c^{Dm}$ $836c^{m}$ $657c^{dm}$. Welchen Gesammt-Cubikinhalt haben die 3 Reservoirs?

21) Ein Oekonom besitzt 2 Ha 8 Da 7 a 5 da 6 ca Weizen-Aecker, 3 Ha 7 Da 4 a 9 da 8 ca Roggenäcker, 3 Ha 2 Da 8 a 5 da 7 ca Gerstenäcker, 2 Ha 5 Da 3 a 1 da 6 ca Haberäcker, 2 Da 6 a 4 da 7 ca Kartoffelacker und 4 Ha 8 Da 3 a 8 da Wiesengrund. Wie groß ist dieser Grundbesitz?

22) Eine Stadt besteht aus der sogenannten Altstadt und 3 Vorstädten: die Altstadt nimmt einen Flächenraum von 3 Ka 5 Ha 6 Da 4 a ein, die östlich gelegene Vorstadt dehnt sich über 1 Ka 1 Ha 9 Da 6 a aus, die südliche über 4 Ha 7 Da 5 a und die westliche über 5 Ha 7 Da 8 a. Ueber welches Areal erstreckt sich die ganze Stadt?

23) Ein Weinwirth kaufte dreierlei Sorten weißen und

zweierlei Sorten rothen Wein: von der besten Sorte des weißen Weines erhielt er ein Faß mit 1 Kl 8 Hl 7 Dl 9 l, von der mittleren Sorte ein Faß mit 2 Kl 5 Hl 7 Dl 8 l und von der schlechtesten Sorte ein Faß mit 2 Kl 4 Hl 8 Dl 5 l; von der bessern Sorte des Rothweines ein Faß mit 8 Hl 9 Dl 7 l und von der schlechteren Sorte ein Faß mit 9 Hl 8 Dl 7 l. Wieviel Wein hat er im Ganzen gekauft?

24) Ein Bauer brachte 3 Säcke Weizen auf die Schranne: im ersten Sack waren 2 Hl 8 Dl 9 l, im zweiten 1 Hl 7 Dl 4 l und im dritten 2 Hl 1 Dl 7 l. Wieviel enthielten die drei Säcke zusammen?

25) Auf einen Wagen waren 5 Kisten mit Waare geladen: die erste Kiste wog 3 Ctr. 48 Pfd. 370 g, die zweite 5 Ctr. 57 Pfd. 48 g, die dritte 2 Ctr. 88 Pfd. 457 g, die vierte 4 Ctr. 68 Pfd. 346 g und die fünfte 3 Ctr. 8 Pfd. 36 g. Wie schwer war die Last des Wagens?

26) Ein Kaufmann schickte 4 Pakette zur Post: das erste wog 3 Kg 8 Hg 7 Dg 6 g, das zweite 4 Kg 9 Hg 5 Dg 8 g, das dritte 2 Kg 6 Hg 4 Dg 9 g und das vierte 1 Kg 8 Hg 5 Dg 7 g. Wie groß war das Gesammtgewicht?

II. Subtraction benannter Zahlen.

§ 18.

Zwei gleichartige Systeme von Maßen, Gewichten oder Münzen werden von einander subtrahirt, wie folgt: man schreibe zuerst beide Systeme so unter einander, daß nur die gleichnamigen Ordnungen unter einander zu stehen kommen, subtrahire hierauf die Zahlen der niedrigsten Ordnung von einanderi dann die der nächst höheren Ordnung u. s. w., bis be, allen Ordnungen die Subtraktion ausgeführt ist. Ist bei einer Ordnung der Minuend kleiner als der Subtrahend, so entlehne man zuvor von der nächst höheren Ordnung.

Es seien z. B. folgende zwei unter einander geschriebenen Zeitmaß-Systeme von einander zu subtrahiren:

Jahre	Monate	Tage	Stunden	Minuten
	17		37	
18	5	27	13	54
12	11	19	21	15
5	6	7	16	39

so werden zuerst die Minuten subtrahirt, wodurch sich der Rest 39 ergibt. Hierauf subtrahirt man die Stunden; da aber der Minuend 13 kleiner ist als der Subtrahend 21, so entlehnt man von den Tagen 1 Einheit, welche 24 Stunden gleich ist, addirt diese 24 Stunden zu den schon vorhandenen 13 Stunden, was 37 Stunden gibt, subtrahirt jetzt 21 von 37 und schreibt den Rest 16 Stunden darunter. Analog ist die Subtraktion der Tage, Monate und Jahre auszuführen.

§ 19.

Uebungs-Aufgaben.

1) Ein Vater war 48 Jahre 7 Monate 24 Tage 16 Stunden 48 Minuten alt, sein Sohn 17 Jhr. 5 Mon. 15 Tg. 17 Std. 37 Min. Um wieviel war der Vater älter als der Sohn?

2) Der Planet Venus vollendet seine Bewegung (siderische) um die Sonne in 224 Tagen 16 Stunden 48 Minuten und der Planet Merkur in 87 Tg. 23 Std. 13 Min. 55 Sek. Um wieviel braucht die Venus länger als der Merkur?

3) Die Umlaufszeit des Enke'schen Kometen beträgt 3 Jhr. 3 Mon. 14 Tg. 9 Std. 36 Min., die des Biela'schen Kometen 6 Jhr. 8 Mon. 26 Tg. 9 Std. 36 Min. Um wieviel dauert diese länger als jene?

4) In einer Kanzlei wurden im Jahre 1873 4 Ballen 8 Ries 3 Buch 5 Heft 9 Bg. Papier verbraucht, im Jahre 1874 war der Bedarf um 1 Bll. 9 Rs. 6 Bch. 4 Hft. 2 Bg. kleiner. Wie groß war der Papierverbrauch i. J. 1874?

5) Für ein wissenschaftliches Werk waren zur ersten Auflage 7 Ballen 2 Ries 5 Buch 3 Heft 9 Bogen erforderlich, zur zweiten Auflage aber um 1 Bll. 7 Rs. 2 Bch. 8 Hft. 1 Bg. weniger. Wieviel Papier wurde zur zweiten Auflage genommen?

6) Ein Buch besteht aus 2 Bänden: der erste Band erfordert für eine gewisse Anzahl von Exemplaren 6 Bll. 8 Rs. 5 Bch. 2 Hft. 4 Bg., der zweite Band 8 Bll. 6 Rs. 1 Bch. 2 Hft. 9 Bg. Um wieviel verlangt der zweite Band mehr Papier als der erste?

7) Ein Bauer säete auf zwei Aecker Weizen und Roggen: der Weizenacker umfaßte 3 Tagwerk 26 Dezimalen 2 □Ruthen, der Roggenacker um 1 Tagwerk 54 Dez. 3 □° weniger. Wie groß ist der Roggenacker?

8) Ein Oekonom hat 84 Tagwerk 35 Dezimalen 1 □Ruthe Grundstücke und verkauft davon 17 Tgw. 48 Dez. 2 □°. Wieviel bleibt ihm noch?

9) Ein Gutsbesitzer hat 2 Waldungen, welche sich zusammen über 28 Tagwerk 67 Dezim. 3 □° ausdehnen; die eine Waldung erstreckt sich auf 18 Tgw. 88 Dez. 2 □°, wie groß ist das Areal der anderen?

10) Ein Kaufmann kauft Waare um 12 Mark 65 Pfennige und verkauft sie wieder um 15 ℳ 20 ₰. Welchen Gewinn hat er gemacht?

11) Jemand hatte 528 ℳ 15 ₰ bei sich und verlor davon 19 ℳ 85 ₰. Wieviel blieb ihm noch?

12) Als ein Dienstbote sein Vermögen zählte, entzifferten sich 205 ℳ 35 ₰; nach einem Jahre zählte er es wieder und es fanden sich 327 ℳ 30 ₰. Wieviel hatte er während dieser Zeit erspart?

13) Es führen zwei verschiedene Wege von einem Orte zu einer Stadt: der eine Weg ist 35 Km 7 Hm 3 Dm 8 m lang, der andere 29 Km 8 Hm 6 Dm 5 m. Wie groß ist der Unterschied?

14) Eines Tages hatte die Quecksilbersäule des Barometers eine Länge von 7 dm 2 cm 6 mm, bis zum anderen Tage sank sie um 3 cm 8 mm; wie stark war am zweiten Tage der Luftdruck?

15) In einem unregelmäßigen Zimmer sind zwei gegenüberstehende Wände ungleich groß: die eine Wand hält 15 □m 4 □dm 63 □cm, die andere ist um 2 □m 47 □dm 79 □cm kleiner; wie groß ist letztere?

16) Von 2 Seeen hat der eine eine Oberfläche von 5□Km 23□Hm 47□Dm 54□m, der andere eine solche von 4□Km 45□Hm 78□Dm 25□m. Wie groß ist der Unterschied?

17) Von 2 Kisten hat die eine einen Kubikinhalt von $1c^{m}$ $345c^{dm}$ $18c^{cm}$, die andere ist um $407c^{dm}$ $783c^{cm}$ kleiner; wie groß ist letztere?

18) Von 2 Höhlen faßt die eine einen Kubikraum von $1c^{Km}$ $5c^{Hm}$ $473c^{Dm}$ $800c^{m}$, die andere ist um $135c^{Hm}$ 236 c^{Dm} $990c^{m}$ kleiner; wie groß ist diese?

19) Ein Gutsbesitzer hat eine große Wiese, welche durch ein Flüßchen in 2 ungleiche Theile getheilt ist: der Theil am linken

Ufer hält 2 Ha 1 Da 8 a 7 da, der Theil am rechten Ufer 1 Ha 5 Da 4 a 9 da. Um wieviel ist der größere Theil größer?

20) Das Areal einer Gemeinde beträgt 45 Ka 5 Ha 3 Da 7 a, das der benachbarten Gemeinde 38 Ka 4 Ha 6 Da 8 a. Um wieviel ist diese kleiner als jene?

21) Ein Bauer hatte 3 Hl 4 Dl 7 l Weizen gesäet und 5 Kl 2 Hl 4 Dl 9 l davon geerntet; um wieviel hat er mehr geerntet als gesäet?

22) Ein Weinbauer baute in einem weinreichen Jahre 4 Kl 3 Hl 6 Dl 9 l Wein und in einem weinarmen Jahre 2 Kl 6 Hl 8 Dl 4 l; wie groß ist der Unterschied?

23) Ein Schwein wog 45 Kg 8 Hg 6 Dg 8 g, ein halbes Jahr später wog es 108 Kg 9 Hg 5 Dg 9 g; wie groß war die Gewichtszunahme?

24) Von 2 Ochsen hatte der eine ein Gewicht von 387 Kg 8 Hg 5 Dg, der andere ein Gewicht von 469 Kg 7 Hg 3 Dg; um wieviel wog dieser mehr als jener?

§ 20.

A. **Altersrechnungen insbesondere.**

Bei den Altersrechnungen sind 3 verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Geburtszeit, die Sterbezeit oder das Alter berechnet werden soll. Man erhält

a) die Geburtszeit durch Subtraktion des Alters von der Sterbezeit,

b) die Sterbezeit durch Addition der Geburtszeit und des Alters und

c) das Alter durch Subtraktion der Geburtszeit von der Sterbezeit.

Statt der Sterbezeit kann auch jeder andere Zeitpunkt zwischen der Geburts- und Sterbezeit dienen, bis zu welchem das Alter in Betracht kommt.

Bei den Altersrechnungen und überhaupt bei allen Zeitrechnungen ist immer nur mit vollendeter Zeit zu rechnen, und jede in einer solchen Aufgabe vorkommende unvollendete Zeit muß in Einheiten der nächst niedrigeren Ordnung ausgedrückt werden.

Die Geburts- und Sterbezeit erscheinen in der gewöhnlichen Fassung als unvollendete Zeiten und müssen in vollendete umge-

wandelt werden. Das Alter, welches man ohnehin in vollendeter Zeit auszudrücken pflegt, bedarf keiner Umwandlung.

Statt des mit Namen gegebenen unvollendeten Monats ist die Anzahl der demselben vorausgehenden Monate des unvollendeten Jahres und statt der nach der Uhr gegebenen Zeit die Anzahl der von Mitternachts 12 Uhr bis zum fraglichen Zeitpunkt verflossenen Stunden und Minuten in die Rechnung zu setzen.

Da nur mit vollendeter Zeit gerechnet wird, so muß auch die aus der Rechnung als Resultat hervorgehende Zeit eine vollendete sein und als Geburts- oder Sterbezeit dem Sprachgebrauche gemäß in die entsprechende Fassung der unvollendeten Zeit übersetzt werden. Statt der aus der Rechnung resultirenden Zahl der Monate ist, wenn noch Zahlen von niedrigeren Zeitmaßen nachfolgen, derjenige Monat mit Namen zu bezeichnen, welcher auf die resultirenden Monate zunächst folgt; die zugehörigen Stunden und Minuten werden nach der Uhr ausgedrückt.

Folgende 3 Beispiele mit spezieller Erklärung mögen zum besseren Verständnisse des Besagten dienen:

I. Beispiel.

Jemand starb im Jahre 1874 den 15. April Abends um ¾ auf 7 Uhr und erreichte ein Alter von 67 Jahren 8 Monaten 12 Tagen 21 Stunden 15 Minuten; wann wurde er geboren?

Jhr.	Mon.	Tg.	Std.	Min.
	15		42	
1873·	3	14·	18	45
67	8	12	21	15
1805	7	1	21	30

Er wurde geboren im Jahre 1806 den 2. August Abends um ½10 Uhr.

Erklärung. 1) Die unvollendete Sterbezeit muß zuerst in vollendete Zeit umgewandelt werden und dann in Ansatz kommen.

Von der Sterbejahreszahl 1874 war das letzte Jahr, nämlich das 1874ste, nicht vollendet, weil es erst bis zum April reichte; folglich waren es nur 1873 vollendete Jahre, welche in die Rechnung zu setzen sind.

Der Sterbe-Monat April ist der 4. Monat, dieser war aber am 15. noch nicht vollendet, daher sind nur 3 vollendete Monat statt des Namens April in Rechnung zu bringen.

Der 15. Tag war Abends um $\frac{3}{4}$ auf 7 Uhr noch nicht ganz verflossen, sonach kommen nur 14 vollendete Tage in Ansatz.

Die nach der Uhr gegebenen Stunden müssen von Mitternacht 12 Uhr bis Abends 6 Uhr gezählt werden, es sind 18 Stunden, welche in Rechnung kommen.

Für die $\frac{3}{4}$ Stunden hat man 45 Minuten zu nehmen.

2) Die als Resultat der Subtraction herausgekommene Geburtszeit ist vollendet und in die entsprechende Fassung der unvollendeten Zeit zu übersetzen, wie folgt:

Ueber die 1805 vollendeten Jahre gehen noch 7 Monate, welche zum nächst folgenden Jahre, nämlich zum 1806ten, gehören; daher ergibt sich 1806 als Geburts-Jahreszahl.

Die 7 Monate sind vollendet und geht noch 1 Tag darüber; folglich gehört dieser Tag zum 8. Monat, welcher mit seinem Namen August zu bezeichnen ist.

Auf den vollendeten Tag folgen noch 21 Stunden, welche einen Theil des zweiten Tages bilden; somit erhält man den zweiten Tag, d. i. den 2 August.

Die von Mitternacht 12 Uhr an zu zählenden 21 Stunden geben, nach der Uhr ausgedrückt, 9 Uhr Abends und mit den 30 Minuten $\frac{1}{2}$10 Uhr.

II. Beispiel.

Jemand wurde geboren im Jahre 1824 den 18. Juni um $\frac{1}{2}$1 Uhr Mittags und starb den 24. Mai 1873 um $\frac{1}{4}$ nach 8 Uhr Abends; wie alt wurde er?

Die unvollendete Geburts- und Sterbezeit hat man vor dem Ansatze in vollendete Zeiten umzuwandeln und zwar auf dieselbe Art, wie die Sterbezeit im I. Beispiele.

Jhr.	Mon.	Tg.	Std.	Min.
	16			75
1872	4	23	20	15
1823	5	17	12	30
48	11	6	7	45

III. Beispiel.

Jemand wurde im Jahre 1836 den 25. Juli um 7 Uhr Morgens geboren und erreichte ein Alter von 34 Jahren 3 Mon. 22 Tagen 13 Stunden 33 Minuten; wann starb er?

Jhr.	Mon.	Tg.	Std.	Min.
1835	6	24	7	—
34	3	22	13	33
1869	10	16	20	33

Er starb im Jahre 1870 den 17. November 3 Minuten über ½9 Uhr Abends.

§ 21.

B. Zeitrechnungen überhaupt.

Außer den Altersrechnungen gibt es noch verschiedene andere Zeitrechnungen, welche der nämlichen Behandlung unterliegen, wie jene; dabei unterscheidet man: Anfang, Ende und Zwischenzeit. Der Anfang entspricht der Geburtszeit, das Ende der Sterbezeit und die Zwischenzeit dem Alter einer Altersrechnung.

I. Beispiel.

Ein Verbrecher war 8 Jahre 3 Monate 14 Tage 17 Std. 45 Minuten im Gefängnisse und wurde im Jahre 1866 den 24. Juni um ½1 Uhr Mittags aus demselben entlassen; wann kam er ins Gefängniß?

Jhr.	Mon.	Tg.	Std.	Min.
			35	90
1865	5	23	~~12~~	~~30~~
8	3	14	17	45
1857	2	8	18	45

Er kam im Jahre 1858 den 9. März Abends um ¾7 Uhr ins Gefänguiß.

II. Beispiel.

Ein Knabe trat am 1. August 1861 Mittags 1 Uhr in die Lehre und war 2 Jahre 11 Monate 28 Tage 21 Stunden Lehrling; wann wurde er Gesell?

Jhr.	Mon.	Tg.	Std.
1860	7	—	13
2	11	28	21
1863	6	29	10

Er wurde am 30. Juli 1864 um 10 Uhr Vormittags Gesell.

III. Beispiel.

Napoleon III. wurde am 2. Dez. 1852 zum Kaiser proklamirt und am 4. Sept. 1870 nach der Schlacht bei Sedan des Thrones entsetzt; wie lange regierte er als Kaiser?

Jhr.	Mon.	Tg.
	20	
1869	8	4
1851	11	2
--17	-9	2

Napoleon III. regierte 17 Jahre 9 Monate 2 Tage als Kaiser.

§ 22.

Uebungs-Aufgaben.

1) Jemand wurde 28 Jahre 7 Monate 25 Tage 17 Stunden 54 Minuten alt und starb den 18. Mai 1873 um ½10 Uhr Vormittags; wann wurde er geboren?

2) Karl erreichte ein Alter von 12 Jahren 9 Monaten 20 Tagen 21 Stunden 48 Minuten und starb im Jahre 1874 den 14. Juli 4 Minuten vor ¾ auf 3 Uhr Nachmittags; wann wurde er geboren?

3) Bertha starb in einem Alter von 5 Jahren 8 Monaten 16 Tagen 18 Stunden 20 Minuten im Jahre 1868 den 6. April um ¼ über 4 Uhr Nachmittags; wann wurde sie geboren?

4) Jemand wurde geboren im Jahre 1826 den 13. Oktober um ½10 Uhr Abends und wurde 45 Jahre 11 Monate 24 Tage 19 Stunden 48 Minuten alt; wann starb er?

5) „Mein Töchterchen", sagte eine Mutter, „starb in dem zarten Alter von 2 Jhr. 8 Mon. 23 Tg. 21 Std. 40 Min. und wurde geboren im Jahre 1869 den 12. Novbr. ¼ über 11 Uhr Nachts"; wann starb dasselbe?

6) „Wann müßte ich wohl sterben", sagte ein Sonderling, „wenn mein höchstes Alter sich durch lauter Dreier ausdrücken ließe, d. h. wenn ich 33 Jahre 3 Mon. 3 Tg. 3 Std. 33 Min. alt würde, da ich im Jahre 1855 den 5. August Morgens um ½5 Uhr geboren wurde?"

7) Ein Soldat fiel in der Schlacht bei Marengo am 14. Juni 1800 Nachmittags ½2 Uhr, er wurde geboren im J. 1778 den 27. Septbr. Morgens um ¾4 Uhr; wie alt wurde er?

8) Mozart wurde geboren den 27. Januar 1756 und starb den 5. Dez. 1791; welches Alter wurde ihm beschieden?

9) Friedrich Schiller wurde den 10. Nov. 1759 geboren und starb am 9. Mai 1805; welches Alter erreichte er?

10) Als Napoleon I. den 2. Dezbr. 1804 bei seiner Krönung

sich und seiner Gemahlin die Kaiserkrone selbst aufsetzte, war er 35 Jahre 3 Mon. 17 Tg. alt; wann war er geboren?

11) Martin Luther, geb. den 10. Novbr. 1483 in Eisleben, war 41 Jahre 7 Mon. 3 Tg. alt, als er sich mit Katharina von Bora verheirathete; wann war dies?

12) Göthe wurde den 28. August 1749 zu Frankfurt a. M. geboren und promovirte am 6. August 1770 zum Doctor der Jurisprudenz; wie alt war er da?

13) Ein von Europa nach Amerika fahrendes Segelschiff landete an der Küste von Amerika am 4. Juni 1860 7 Minuten vor ¾8 Uhr Morgens nach einer Fahrzeit von 1 Monat 10 Tg. 17 Std. 49 Min.; wann war es nach amerikanischer Zeit von Europa abgefahren?

14) Im Jahre 1874 haben 2 Mondsfinsternisse stattgefunden: die zweite am 25. Oktbr. von 6 Uhr 25 Min. Morgens an, die erste begann um 5 Monate 23 Tg. 15 St. 17 Min. früher; wann war dies?

15) Im Jahre 1875 nahm der Frühling mit dem Eintritte der Sonne in das Zeichen des Widders den 21. März um 12 Uhr 53 Min. Nachts seinen Anfang und dauerte 3 Monate 21 Std.; wann begann der Sommer?

16) Eine Nordpol-Expedition begann ihre Fahrt am 1. Mai 1864 um ½7 Uhr Morgens und kam nach 2 Jahren 6 Mon. 21 Tg. 15 Std. 54 Min. wieder zurück; wann war dies?

17) Im Jahre 1875 ereigneten sich 2 Sonnenfinsternisse: die erste am 6. April von 4 Uhr 42 Min. früh an, die zweite am 29. Septbr. von 10 Uhr 57 Min. Vormittags an; wie groß war die Zwischenzeit?

18) Die Hundstage vom Jahre 1875 begannen am 23. Juli um 10 Uhr 34 Min. Vormittags und endeten am 23. August um 3 Uhr 18 Min. Nachmittags; wie lange dauerten sie?

III. Multiplication benannter Zahlen.

§ 23.

Von den beiden Faktoren einer Multiplication kann nur der Multiplicand eine Benennung haben, der Multiplicator muß unbenannt sein; denn der Multiplicator zeigt nur an, wie oft der

Multiplicand als Summand genommen werden soll. Würde man z. B. sagen: „3 *M.* mal 4 Pfd.", so gäbe das keinen Sinn; wohl aber läßt sich sagen: „3 mal 4 Pfd. sind 12 Pfd.", oder: „4 mal 3 *M.* sind 12 *M.*"

a) Bei der Multiplication eines Maß-, Gewichts- oder Münzsystemes durch eine Zahl multiplicire man, mit der niedrigsten der vorhandenen Ordnungen anfangend, die Zahlen der verschiedenen höheren Ordnungen nach einander bis zur höchsten und reduzire die dabei sich ergebenden Produkte auf die Einheiten der nächst höheren Ordnung; der durch die Reduktion erhaltene Rest ist jedesmal als Resultat anzuschreiben und der Quotient bei der nächst höheren Ordnung einzuzählen.

Beispiel mit Auflösung.

Es soll das 8fache von 7 Jahren 9 Monaten 12 Tagen gefunden werden.

Jhr.	Mon.	Tg.
7	9	12
		× 8
62	3	6

Man multiplicire zuerst die Tage: 8 mal 12 Tage sind 96 Tage, diese geben 3 Monate und 6 Tage, letztere werden unterhalb des Striches unter die Tage geschrieben und die 3 Monate beim Multipliciren der Monate eingezählt.

Nun werden die Monate multiplicirt: 8 mal 9 Monate sind 72 Mon. und die 3 Mon. dazu addirt, macht 75 Mon.; diese geben 6 Jhr. und 3 Mon., letztere werden unter die Monate als Resultat geschrieben und die 6 Jahre zu den Jahren hinübergezählt.

Endlich multiplicirt man die Jahre: 8 mal 7 Jhr. sind 56 Jhr. und die 6 Jahre eingezählt, gibt 62 Jahre, welche als Resultat unter die Jahre geschrieben werden.

b) Sind die Reductionszahlen des Multiplicanden 10, 100 oder 1000, so läßt sich die Multiplication am einfachsten ausführen, wenn man zuerst resolvirt (§ 11.), dann multiplicirt und hierauf wieder reducirt (§ 13.). Z. B. man habe 8 m 5 dm 6 cm 9 mm mit 7 zu multipliciren, so geschieht dies, wie folgt:

8 m 5 dm 6 cm 9 mm = 8569 mm
× 7
59983 mm = 5 Dm 9 m 9 dm 8 cm 3 mm.

§ 24.

Uebungs-Aufgaben.

1) Die Umlaufszeit des Enke'schen Kometen beträgt 3 Jahre 3 Mon. 14 Tg. 9 Std. 36 Min.; nach welcher Zeit wird er seit seiner letzten Erscheinung der Sonne zum 20. Male am nächsten kommen?

2) Die synodische Umlaufszeit des Mondes beträgt 29 Tage 12 Std. 44 Min. 3 Sek.; nach welcher Zeit haben wir seit dem letzten Vollmonde zum 12. Male Vollmond?

3) Eine Uhr, welche auch die Monate anzeigt, geht in einer Woche um 2 Stunden 36 Min. 47 Sek. vor; wie viel macht dies in einem Jahre aus?

4) Der 17. Theil eines Ackerlandes hält 3 Tagwerk 48 Dez. 3 Quadratruthen 57 Quadratfuß, wie groß ist das ganze Ackerland?

5) Eine Wiese erstreckt sich über 5 Tagwerk 66 Dezimalen 2 Quadratruthen 85 Quadratfuß, wie viel beträgt das Elffache?

6) Jemand hat täglich 2 ℳ 75 ₰ für Kost zu bezahlen, wie viel macht dies in einem Monate zu 30 Tagen?

7) Ein Zimmerherr bezahlt monatlich 12 ℳ 50 ₰ für sein Logis, wie viel trifft es auf ein Jahr?

8) Ein Raucher läßt täglich 6 Stück Cigarren, jedes zu 20 ₰, im Rauche aufgehen, wie viel kostet ihm das Rauchen in einem Jahre?

9) Eine Gesellschaft von 24 Personen schießt zu einem gewissen Zwecke Geld zusammen: jeder gibt 3 ℳ 15 ₰ her; wie hoch beläuft sich die Summe?

10) In einer Kanzlei wurden in einer Woche 1 Ballen 6 Ries 1 Buch 7 Heft 9 Bogen Papier verbraucht; wieviel träfe es auf ein halbes Jahr, wenn der Verbrauch jede Woche gleich wäre?

11) Ein Exemplar eines Conversations-Lexikons umfaßt 1 Ries 3 Buch 5 Heft 8 Bogen Papier, wieviel Papier erfordern 350 Exemplare?

12) Ein Papierfabrikant verfertigte in einer Woche 15 Ballen 7 Ries 5 Buch 2 Heft 3 Bogen Papier, wieviel Papier kann er in einem Vierteljahre zu Stande bringen?

13) Der Schatten eines Mannes hatte zur Mittagszeit eine Länge von 1 m 8 dm 5 cm, nahe bei Sonnenuntergang war

die Länge 23 mal größer; wie lang war der Schatten zu dieser Zeit?

14) Welchen Weg hat ein Wagenrad mit einem Umfange von 3 m 4 dm 7 cm nach 50maliger Umdrehung zurückgelegt?

15) Wieviel beträgt das 42fache von 27 □Km 58 □Hm 54 □Dm 7 □m 9 □dm 88 □cm 8 □mm?

16) Wieviel ist 56 mal 8 □Km 36 □Hm 31 □m 8 □dm 19 □mm?

17) Eine Brunnenröhre liefert in einem Tage 5c^{m} 316c^{dm} 18c^{cm} Wasser, welches Wasserquantum fließt in einer Woche aus dieser Röhre?

18) In einem Weinkeller befinden sich 8 gleich große Weinfässer, deren jedes 1c^{m} 6c^{dm} 69c^{cm} Inhalt faßt; welchen cubischen Inhalt fassen alle 8 Fässer zusammen?

19) Ein bayer. Tagwerk hält 3 Da 4 a 7 ca 3 ma, welchen Flächenraum haben 20 Tagwerk?

20) Ein Gutsbesitzer verkaufte von seinem Grundbesitze den 11. Theil, welch' letzterer einen Flächenraum von 1 Ha 3 Da 5 a 8 da einnimmt; wie groß war sein Grundbesitz zuvor?

21) Ein bayer. Scheffel hielt 2 Hl 2 Dl 2 l 3 dl 5 cl 8 ml, wie viel betragen 18 Scheffel?

22) Eine bayer. Maß hielt 1 l 6 cl 9 ml, wieviel machen 75 bayer. Maß?

23) Welches Gewicht haben 25 eiserne Kanonenkugeln, wenn jede 6 Kg 8 Hg 5 Dg 2 g 9 dg wiegt?

24) Ein Gefäß zum Wasserschöpfen faßt 2 Kg 8 Hg 5 Dg 6 g Wasser; füllt man nun dieses Gefäß 15 mal mit Wasser und gießt dieses immer in einen Kübel, welches Gewicht hat dann das Wasser im Kübel?

IV. Division benannter Zahlen.

§ 25.

Bei der Division ist zu unterscheiden, ob Dividend und Divisor gleichartig oder ungleichartig sind.

I. Fall. Ist der Divisor von gleicher Art mit dem Dividenden und sind beide von ein und demselben Maß-, Gewichts- oder Münzsysteme, so resolvire (§ 10.) man zuerst sowohl den Dividenden als auch den Divisor und zwar beide auf die gleiche

und niedrigste der gegebenen Ordnungen, alsdann führe man die Division aus.

Beispiel.

Wie oft sind 8 Monate 12 Tage 20 Stunden in 17 Jahren 5 Monaten und 22 Tagen enthalten?

Jahre	Monate	Tage		Monate	Tage	Stunden
17	5	22	:	8	12	20

17 × 12 = 39 + 17 = 209 Mon.
209 × 30 = 6292 Tg.
6292 × 24 = 25168 + 12584 = 151008 Std.

8 × 30 = 252 Tg.
252 × 24 = 1028 + 504 = 6068 Std.

151008 : 6068 = 24 mal.
12136
-29648
24272
-5376

II. Fall. Ist der Divisor von anderer Art als der Dividend und nur eine einzige Zahl, während der Dividend ein System von Maßen, Gewichten oder Münzen darstellt, so könnte man zwar auch, wie im I. Falle, den Dividenden zuerst resolviren und hierauf dividiren; allein dann müßte man das Resultat wieder reduciren, was die Rechnung umständlicher machen würde, wenn nicht die Reduktionszahlen 10, 100 oder 1000 sind.

a) Einfacher wird die Rechnung bei anderen Reduktions-Zahlen als 10, 100 oder 1000, wenn man den Dividenden nicht resolvirt, sondern die verschiedenen gegebenen Ordnungen von der obersten bis zur untersten einzeln nach einander durch den Divisor dividirt, wobei die sich ergebenden Reste behufs Erlangung der Theilungsfähigkeit in Einheiten der nächst niedrigeren Ordnung verwandelt und die Einheiten der gegebenen gleichnamigen Ordnung eingezählt werden.

Beispiel.

Wie viel ist der 7. Theil von 17 Jahren 7 Monaten 26 Tagen 22 Stunden?

Auflösung. Jhr. Mon. Tg. Std.

```
    17        7        26        22 : 7 = 2 Jhr.
    14
    -3 Jhr.
 ×  12
    43 : 7 = 6 Mon.
    42
    -1 Mon.
 ×  30
    56 : 7 = 8 Tg.
    56
   --22 : 7 = 3 1/7 Std.
     21
     -1 Std.
```

Der 7 Theil ist also = 2 Jhr. 6 Mon. 8 Tg. $3\frac{1}{7}$ Std.

Der 7. Theil von 17 Jahren sind 2 Jahre, wobei noch 3 Jahre übrig bleiben, von welchen gleichfalls der 7. Theil zu nehmen ist; da aber auf den 7. Theil von 3 Jahren kein ganzes Jahr mehr trifft, so müssen die 3 Jahre in Monate verwandelt werden, wodurch man 36 Mon. und mit den gegebenen 7 Mon. 43 Mon. erhält, von welchen der 7. Theil 6 Mon. sind.

Um auch den Rest 1 Mon. durch 7 theilen zu können, verwandle man 1 Mon. in Tage, wodurch man 30 Tg. und nach Hinzuzählung der gegebenen 26 Tg. 56 Tg. erhält; hievon kommen auf den 7. Theil genau 8 Tg. ohne Rest.

Der 7. Theil von den gegebenen 22 Stunden sind 3 Std., wozu noch von dem Reste 1 der 7. Theil, nämlich $\frac{1}{7}$ Std., gehört.

b) Sind die Reductionszahlen 10, 100 oder 1000, so ist das Verfahren kürzer, wenn man den Dividenden zuerst resolvirt, dann dividirt und das Resultat wieder reduzirt.

Beispiel. Wieviel ist der 8. Theil von 6 m 5 dm 7 cm 9 mm?

Auflösung. 6 m 5 dm 7 cm 9 mm = 6579 mm;

```
mm  6579 : 8 = 822 3/8 mm = 8 dm 2 cm 2 3/8 mm.
    64
    -17
     16
     -19
      16
      -3 mm.
```

c) Ist auch der Divisor ein System von Maßen, Gewichten oder Münzen, so muß er zuerst resolvirt werden und dann in der Rechnung als unbenannte Zahl figuriren.

Beispiel. Jemand hat in 1 Jahre 4 Monaten 24 Tagen 1532 ℳ 16 ₰ ausgegeben, wieviel trifft es durchschnittlich auf den Tag?

Auflösung. 1532 ℳ 16 ₰ = 153216 ₰.
1 Jhr. 4 Mon. 24 Tg. = 504 Tg.

₰
153216 : 504 = 304 ₰ = 3 ℳ 4 ₰.
1512
--2016
2016
- - - -

Uebungs-Aufgaben.

§ 26.

1) Ein Knabe war 6 Jahre 4 Monate 18 Tage 15 Stunden alt, als sein Vater 49 Jahre 7 Monate 23 Tage zählte; wievielmal war der Vater älter als der Sohn?

2) Ein Verbrecher verbüßte 7 Jahre 7 Monate 8 Tage und 20 Stunden im Gefängnisse und starb in einem Alter von 54 Jhr. 9 Mon.; den wievielten Theil seiner Lebenszeit verbrachte er im Gefängnisse?

3) An einer städtischen Pfarrkirche wurde 3 Jahre 11 Mon. 14 Tage 13 Stunden gebaut, die Bauzeit der Kathedrale derselben Stadt betrug 17 Jahre 2 Monate 21 Tage; wievielmal länger ist die Bauzeit der Kathedrale?

4) Ein Schreibmaterialien-Händler hatte einen Papiervorrath von 3 Ballen 8 Ries 1 Buch 6 Heft 5 Bogen, davon verkaufte er an einem Tage 5 Ries 8 Buch; den wievielten Theil verkaufte er vom ganzen Vorrathe?

5) Wenn 3 Ries 2 Buch 7 Heft 9 Bogen Schreibpapier eine Doppelkrone kosten, wie viele Doppelkronen kosten 15 Ballen 3 Ries?

6) Zu einem Exemplare eines Werkes sind 2 Buch 3 Heft 7 Bogen nöthig, wieviele solche Exemplare geben 5 Ballen 8 Ries 6 Buch 5 Heft 6 Bogen?

7) Ein Bauer besitzt 15 Tagwerk 84 Dezimalen Ackerfeld und verkauft davon 2 Tagwerk 48 Dezimalen 3 □Ruthen; den wievielten Theil seines Ackerfeldes verkauft er?

8) Wenn 1 Liter Wein 4 ℳ 75 ₰ kostet, wie viele Liter erhält man um 42 ℳ 75 ₰?

9) Ein Hektoliter Weizen kostet 19 ℳ 25 ₰, wie viele Hektoliter erhält man für 308 ℳ 65 ₰?

10) Ein Franke gilt 80 Reichspfennige, wie viele Franken geben 28 ℳ 80 ₰?

11) Ein Kilo Rindfleisch kostet 1 ℳ 15 ₰, wie viele Kilo bekommt man um 24 ℳ 45 ₰?

12) Ein Stück Leinwand ist 4 Dm 7 m 8 dm 9 cm lang, davon braucht man zu einem Hemde eine Länge von 3 m 3 dm 2 cm.; wie viele Hemden gibt das ganze Stück?

13) Vom ersten bis zum zweiten Stockwerke eines Hauses beträgt die Höhe 5 m 4 cm, eine Stufe der zugehörigen Stiege ist 2 dm 8 cm hoch; wie viele Stufen hat die Stiege?

14) Ein bayr. Tagwerk ist 34 □Dm 7 □m 27 □dm gleich, wie viele Tagwerk sind 8 □Hm 72 □Dm 5 □m?

15) Ein 45 □m 9 □dm 21 □cm fassender Hofraum ist mit lauter gleich großen Steinplatten belegt, von denen jede 31 □dm 75 □cm 50 □mm hält; wie viele Platten sind es?

16) Ein bayr. Scheffel ist $222c^{dm}$ $358c^{cm}$ gleich, wie viele Scheffel geben $85c^{m}$ 48 c^{dm}?

17) Ein bayr. Kubikfuß ist $24c^{dm}$ $861c^{cm}$ gleich, wie viele Kubikfuß geben $2c^{Dm}$ $8c^{m}$?

18) Eine bayer. Dezimal-Quadratruthe kommt 8 ca 5 ma gleich, wie viele Quadratruthen erhält man aus 1 Ha 6 a 5 da?

19) Der wievielte Theil sind 4 Ha 7 a 6 ca 9 ma von 7 Ka 5 Ha 8 da?

20) Eine bayer. Maßkanne ist 1 l 6 cl 9 ml gleich, wie viele Maß geben 6 Hl 8 Dl 4 l 1 dl 7 cl 7 ml?

21) Eine Brunenröhre liefert jede Minute 8 l 2 dl 7 cl Wasser, in welcher Zeit füllt sie ein Gefäß von 3 Hl 4 l 9 dl?

22) Ein bayer. Handelsloth ist 1 Dg 7 g 5 dg gleich, wie viele Loth gehen auf 5 Hg 6 Dg?

23) Auf ein Drachme kommen 3 g 7 dg 5 cg, wie viele Drachmen sind in 1 Kg 8 Dg enthalten?

§ 27.

1) Welches ist der 7. Theil von 32 Jahren 8 Monaten 25 Tagen 16 Stunden 36 Minuten 23 Sekunden?

2) Ein Vater, 52 Jahre 8 Monate 20 Tage 14 Stunden alt, war in diesem Alter 12 mal älter als sein Sohn; wie alt war dieser damals?

3) Ein Taugenichts hatte, als er 59 Jahre 5 Monate 24 Tage 17 Stunden alt war, gerade den 21. Theil seiner Lebenszeit im Gefängnisse zugebracht; wie lange mußte er bis zu diesem Alter der Freiheit entbehren?

4) Ein Papierfabrikant verfertigte in einem Jahre 185 Ballen 8 Ries 1 Buch 9 Heft 2 Bogen Schreibpapier, wieviel trifft davon durchschnittlich auf eine Woche?

5) Ein aus 19 Bänden bestehendes Conversations-Lexikon faßt 1 Ries 5 Buch 8 Heft 2 Bogen, wie stark ist durchschnittlich ein Band?

6) In einer Schreibmaterialien-Handlung wurden in einem Monate 4 Ballen 6 Ries 8 Buch 2 Heft 5 Bogen Schreibpapier verkauft, wie viel kommt durchschnittlich auf einen Tag?

7) Welches ist der 36. Theil von 94 Tagwerk 74 Dezimalen 3 □Ruthen 68 □Fuß?

8) Wenn ein Pfund (zu 32 Loth) einer Waare 47 ℳ 75 ₰ kostet, wie theuer kommt ein Loth?

9) Wenn 45 Liter Wein 83 ℳ 50 ₰ kosten, wie hoch kommt ein Liter?

10) Wenn ein Scheffel (zu 6 Metzen) Roggen 37 ℳ 25 ₰ kostet, was kostet ein Metzen?

11) Wenn ein Eisenbahnzug in einer Stunde eine Strecke Weges von 31 Km 4 Hm 7 Dm 5 m zurückgelegt hat, wie viel trifft es auf eine Minute?

12 Welchen Umfang hat ein Wagenrad, welches bei einer 9maligen Umdrehung einen Weg von 2 Dm 9 m 8 dm 9 cm durchläuft?

13) Welches ist der 15. Theil von 7 □Km 8 □Hm 6 □m 4 □cm 5 □mm?

14) Wenn 8 Papierbogen zusammen eine Fläche von 2 □m 16 □dm 96 □cm decken, wie groß ist ein Bogen?

15) 70 bayer. Kubikfuß sind $1c^{m}$ $740c^{dm}$ $270c^{cm}$ gleich, wie groß ist 1 Kubikfuß?

16) Welches ist der 11000. Theil von $3c^{Km}$ $26c^{Hm}$ $9c^{m}$ $426c^{dm}$ $8c^{cm}$ $14c^{mm}$?

17) 11 Personen mähen eine Wiese von 2 Ha 7 Da 5 a 9 da 8 ca, wie viel hat durchschnittlich 1 Person zu mähen?

18) Ein Bauer hat an Grundstücken 5 Ha 4 Da 7 a 4 da dazu kauft er noch einen Acker, welcher so groß ist wie der 16. Theil seiner Grundstücke vor diesem Kaufe; wie groß ist der neu gekaufte Acker?

19) Eine Brunnenröhre gibt in einem Tage 2 Kl 8 Hl 5 Dl 7 l 4 dl Wasser, wie viel liefert sie in einer Stunde?

20) 5 bayer. Scheffel sind soviel als 1 Kl 1 Hl 1 Dl 1 l 7 dl 9 cl, wie viel hält 1 Scheffel?

21) 4 gleiche Kanonenkugeln wiegen zusammen 12 Kg 8 Hg 9 g, wie schwer ist eine?

22) 10 Exemplare eines wissenschaftlichen Werkes wiegen zusammen 4 Kg 9 Dg 8 dg, wie viel wiegt eines?

23) Jemand hatte in 2 Jahren 7 Monaten 15 Tagen eine Einnahme von 3848 ℳ. 60 ₰, wie viel trifft es durchschnittlich auf den Tag?

24) Ein Schreiber verschrieb in 3 Jahren 5 Monaten 20 Tagen 1 Ballen 5 Buch 8 Bogen Papier, wie viel kommt durchschnittlich auf den Tag?

25) Ein Faß Wein von 4 Hl 48 l kostet 654 ℳ., wie theuer kommt 1 Liter zu stehen?

26) Von einer Flüssigkeit haben 8 Hl 9 Dl 6 l ein Gewicht von 804 Kg. 3 Hg 2 Dg, wie viel wiegt 1 Liter?

27) Ein Eisendraht von 1 Km 5 Hm 2 Dm 3 m Länge wiegt 16 Kg 2 Hg 9 Dg 4 g, welches Gewicht kommt auf eine Länge von 1 m?

II. Abtheilung.

Erster Abschnitt.

Von der Theilbarkeit der Zahlen.

§ 28.

1) Eine Zahl heißt durch eine andere Zahl theilbar, wenn sie sich durch letztere ohne Rest theilen läßt. Demnach ist die Zahl 36 theilbar durch 2, 3, 4, 6, 9, 12 und 18; durch 5, 7, 8, 10, 11 ist sie nicht theilbar.

2) Jede Zahl ist durch sich selbst und durch die Einheit (1) theilbar.

3) Eine Zahl, welche nur durch sich selbst und die Einheit theilbar ist, heißt einfache Zahl oder Primzahl (absolute Primzahl). Also sind 5, 7, 11, 13, 17, 19 lauter Primzahlen. Alle Primzahlen sind ungerade Zahlen mit Ausnahme von 2.

4) Eine Primzahl als Divisor wird Primdivisor und als Faktor Primfaktor genannt.

5) Ist eine Zahl außer durch 1 und sich selbst auch noch durch andere Zahlen theilbar, so heißt sie eine zusammengesetzte Zahl. Z. B. 18 ist außer durch 1 und 18 auch noch durch 2, 3, 6 und 9 theilbar, folglich ist es eine zusammengesetzte Zahl; ebenso sind 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 zusammengesetzte Zahlen. Jede gerade Zahl ist eine zusammengesetzte mit Ausnahme von 2.

6) Eine Zahl, welche in einer anderen Zahl ohne Rest enthalten ist, heißt Maß der letzteren; daher ist 5 ein Maß von 10, 7 ein Maß von 21, 9 von 54.

7) Sind mehrere gegebenen Zahlen durch ein und dieselbe Zahl theilbar, so heißt diese letztere gemeinsames Maß oder gemeinsamer Divisor der gegebenen Zahlen; so ist z. B. 5 ein gemeinschaftlicher Divisor von 10, 15, 20 und 25; 9 von 27, 45 und 72; 8 von 16, 24 und 40.

8) Mehrere gegebenen Zahlen, für welche es keinen gemeinschaftlichen Divisor gibt, heißen relative Primzahlen. So sind 16, 25, 27, 49 unter sich relative Primzahlen, während jede einzeln für sich eine zusammengesetzte Zahl ist.

9) Haben zwei oder mehrere gegebenen Zahlen mehrere gemeinschaftlichen Divisoren, so ist der größte darunter der wichtigste und vortheilhafteste, er heißt der größte gemeinschaftliche Divisor oder das größte gemeinschaftliche Maß der gegebenen Zahlen. Z. B. die Zahlen 36, 48 und 60 haben als gemeinschaftliche Divisoren 2, 3, 4, 6 und 12; davon ist 12 der größte gemeinschaftliche Divisor.

10) Eine Zahl, welche durch mehrere anderen Zahlen theilbar ist, wird gemeinsamer Dividend oder gemeinschaftliches Vielfaches dieser Zahlen genannt. So ist 12 ein gemeinschaftliches Vielfaches von 2, 3, 4 und 6; denn 12 ist durch 2, 3, 4 und 6 theilbar.

11) Für zwei oder mehrere gegebenen Zahlen gibt es nicht nur einen gemeinschaftlichen Dividenden, sondern unzählige verschiedene; unter allen ist aber immer der kleinste gemeinsame Dividend zum Rechnen der bequemste und brauchbarste. Z. B. für die Zahlen 12, 15 und 20 ist 60 der kleinste gemeinsame Dividend; außerdem bildet noch jedes Vielfache von 60 ein gemeinschaftliches Vielfaches von 12, 15 und 20.

§ 29.

Kennzeichen der Theilbarkeit der Zahlen.

1) Durch 2 ist jede gerade Zahl theilbar, wie 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 u. s. w.

2) Durch 3 ist eine Zahl theilbar, wenn ihre Ziffersumme*) durch 3 theilbar ist. Z. B. die Zahl 56724 ist durch 3 theilbar, weil ihre Ziffersumme 24 durch 3 theilbar ist; dagegen läßt sich die Zahl 83504 durch 3 nicht ohne Rest theilen, weil ihre Ziffersumme 20 nicht durch 3 theilbar ist.

3) Durch 4 ist eine Zahl theilbar, wenn ihre letzten 2 Ziffern rechts (beide als Eine Zahl betrachtet) durch 4 theilbar sind. Z. B. die Zahl 873512 ist durch 4 theilbar, weil die letzten zwei Ziffern 12 durch 4 ohne Rest getheilt werden können; 45758 ist daher durch 4 nicht theilbar.

4) Durch 5 ist eine Zahl theilbar, wenn ihre letzte Ziffer

* Unter Ziffersumme einer Zahl versteht man diejenige Summe, welche man durch Addiren aller Ziffern der Zahl erhält. Z. B. die Ziffersumme der Zahl 238519 ist 28; denn $2 + 3 + 8 + 5 + 1 + 9 = 28$.

rechts 5 oder 0 ist. Demnach sind die Zahlen 87395 und 7390 durch 5 theilbar; dagegen lassen sich die Zahlen 9378, 59327 und 804364 durch 5 nicht ohne Rest theilen.

5) Durch 6 ist eine Zahl theilbar, wenn sie durch 2 und 3 theilbar ist, wie z. B. die Zahlen 16572, 8304 und 95136.

6) Durch 8 ist eine Zahl theilbar, wenn ihre letzten 3 Ziffern rechts (alle drei Ziffern als Eine Zahl betrachtet) durch 8 theilbar sind. Sonach läßt sich 857352 durch 8 ohne Rest theilen, weil die aus den letzten 3 Ziffern bestehende Zahl 352 durch 8 theilbar ist; dagegen kann man 57246 nicht ohne Rest durch 8 dividiren.

7) Durch 9 ist eine Zahl theilbar, wenn ihre Ziffersumme durch 9 theilbar ist. Demzufolge erkennt man 572823 als theilbar, aber 95785 als nicht theilbar durch 9.

8) Durch 10 ist eine Zahl theilbar, wenn ihre letzte Ziffer rechts 0 ist; z. B. 83260.

9) Um zu sehen, ob eine Zahl durch 11 theilbar ist, addire man ihre Ziffern auf den ungeraden und ebenso auf den geraden Stellen, subtrahire die beiden Summen von einander, und wenn dann der Rest 0, 11 oder ein Vielfaches von 11 ist, so ist auch die gegebene Zahl durch 11 theilbar. Z. B. von der Zahl 735823 ist die Summe der Ziffern auf den ungeraden Stellen $7 + 5 + 2 = 14$ und die Summe der Ziffern auf den geraden Stellen $3 + 8 + 3 = 14$, subtrahirt man nun die beiden Summen von einander, so erhält man $14 - 14 = 0$. Da der Rest 0 ist, so läßt sich die gegebene Zahl durch 11 ohne Rest dividiren.

10) Ist eine Zahl durch 3 und 4 theilbar, so ist sie auch durch 12 theilbar.

11) Läßt sich eine Zahl durch 2 und 7 ohne Rest theilen, so ist sie auch durch 14 theilbar.

12) Ist überhaupt eine Zahl durch mehrere relativen Primzahlen theilbar, so läßt sie sich auch durch deren Produkt ohne Rest dividiren. Z. B. die Zahl 360 ist durch 5, 4 und 9 theilbar, folglich kann sie auch durch deren Produkt 180 ohne Rest getheilt werden.

13) Eine ungerade Zahl ist durch keine gerade Zahl theilbar.

Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Divisors zweier und mehrerer Zahlen.

§ 30.

1) Der größte gemeinschaftliche Divisor zweier Zahlen wird gefunden, wenn man die größere Zahl durch die kleinere dividirt, hierauf den Divisor durch den Rest dividirt und so lange immer wieder den neuen Divisor durch den neuen Rest dividirt, bis kein Rest mehr übrig bleibt; der letzte Divisor ist dann der gesuchte größte gemeinschaftliche Divisor der gegebenen Zahlen.

In nachstehendem Beispiele ist der größte gemeinsame Divisor von 465 und 585 gesucht.

```
   1     3     1     7
585 : 465 : 120 : 105 : 15
465   360   105   105
---   ---   ---   ---
120   105   -15   ---
```

Der letzte Divisor 15 ist der gesuchte größte gemeinsame Divisor von 465 und 585.

Dieses Verfahren beruht auf dem Satze: „Bei der Division haben Dividend und Divisor denselben größten gemeinschaftlichen Divisor, wie der Divisor und Rest."

Anmerkung. Durch solches Verfahren wird der größte gemeinschaftliche Divisor in ein veränderliches Verhältniß von immer kleiner werdenden Zahlen eingeschlossen, bis die kleinere Zahl selbst in der größeren ohne Rest enthalten ist und sonach den größten gemeinschaftlichen Divisor darstellt.

2) Der größte gemeinsame Divisor von mehr als 2 Zahlen wird gefunden, wenn man denselben zuerst von 2 Zahlen sucht, dann von dem gefundenen und der dritten gegebenen Zahl wieder den größten gemeinsamen Divisor bestimmt und so fortfährt, bis endlich alle gegebenen Zahlen in Rechnung gekommen sind; der zuletzt erhaltene größte gemeinsame Divisor ist der gewünschte.

In nachfolgendem Beispiele ist der größte gemeinsame Divisor von 90, 120, 375 und 525 gesucht und als solcher 15 in c) gefunden:

```
      1    3             12   2              35
a) 120 : 90 : 30;   b) 375 : 30 : 15;   c) 525 : 15.
    90   90             30   30              45
   ---   --             ---  --              ---
   -30   —              -75  —               -75
                         60                   75
                        ---                   —
                         15
```

Anmerkung. Der größte gemeinschaftliche Divisor für mehrere gegebenen Zahlen wird auch gefunden, wenn man von diesen alle gemeinschaftlichen Primdivisoren aufsucht; das Produkt derselben ist der größte gemeinschaftliche Divisor der gegebenen Zahlen. Z. B. die Zahlen 60, 90 und 240 haben als gemeinschaftliche Primdivisoren 2, 3 und 5; folglich ist auch deren Produkt 30 ein gemeinsamer Divisor und zwar der größte, weil 2, 3 und 5 die sämmtlichen sind.

§ 31.

Uebungs-Aufgaben.

Welches ist der größte gemeinsame Divisor von folgenden Zahlen?

a) 392,	524	g) 1386,	1170
b) 477,	729	h) 937,	1859
c) 822,	1206	i) 8524,	9704
d) 378,	5775	k) 7875,	14225
e) 1575,	2380	l) 6314,	8162
f) 2380,	4725	m) 6096,	9960

n) 3810, 6225
o) 26670, 43575
p) 18288, 29880
q) 756, 864, 927
r) 672, 768, 824
s) 1144, 2008, 2904.
t) 240, 270, 410, 530
u) 648, 864, 972, 1602
v) 6048, 6804, 9072, 11214.

Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen mehrerer Zahlen.

§ 32.

1) Das kleinste gemeinsame Vielfache oder der kleinste gemeinsame Dividend zweier oder mehrerer gegebenen Zahlen wird gefunden, wenn man von den gegebenen Zahlen alle theilbaren, deren es wenigstens 2 sein müssen, durch einen gemeinsamen Primdivisor (mit dem kleinsten anfangend) dividirt und die nichttheilbaren Zahlen unverändert abschreibt, hierauf die erhaltenen Quotienten und abgeschriebenen Zahlen auf dieselbe Weise wieder durch einen gmeinsamen Primdivisor dividirt und das Verfahren so lange als möglich fortsetzt; das Produkt der als Divisoren gebrauchten Primzahlen, sowie der letzten Quotienten ist dann das kleinste gemeinsame Vielfache.

Es soll nun von den Zahlen 24, 45, 72 und 150 das kleinste gemeinsame Vielfache gefunden werden.

24,	45,	72,	150	:2
12,	45,	36,	75	:2
6,	45,	18,	75	:2
3,	45,	9,	75	:3
1,	15,	3,	25	:3
1,	5,	1,	25	:5
1,	1,	1,	5	1
				1
				1
				5
				1800

1800 ist das gesuchte kleinste gemeinsame Vielfache, welches durch jede der gegebenen Zahlen theilbar ist.

2) Ist bei der Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen unter den gegebenen Zahlen eine schon in einer der anderen ohne Rest enthalten, wie in obigem Beispiele 24 in 72, so kann man sie (die kleinere) Kürze halber durchstreichen oder aus der Rechnung ganz weglassen. Z. B. unter den Zahlen 36, 48, 96 und 108 ist 36 schon in 108, ebenso 48 in 96 ohne Rest enthalten; folglich kann man 36 und 48 ganz außer Rechnung lassen und das kleinste gemeinsame Vielfache bloß von 96 und 108 bestimmen, da man das gleiche Resultat erhält.

§ 33.

Uebungs-Aufgaben.

Welches ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von nachstehenden Zahlen?

a) 36, 54, 60.
b) 25, 65, 130.
c) 50, 75, 105.
d) 210, 350, 497.
e) 15, 45, 63, 75.
f) 18, 54, 75, 108.
g) 72, 75, 84, 100.
h) 72, 75, 84, 100.
i) 248, 288, 396, 405.
k) 75, 100, 150, 225.
l) 42, 48, 54, 84, 96.
m) 65, 91, 104, 130, 140.
n) 63, 81, 84, 243, 336.
o) 28, 35, 42, 56, 84, 98.

Faktorenzerlegung.

§ 34.

1) Eine gegebene Zahl in ihre Primfaktoren zerlegen heißt alle diejenigen Primzahlen herstellen, welche miteinander multiplicirt die gegebene Zahl geben.

2) Man unterscheidet einfache oder Primfaktoren und zusammengesetzte Faktoren, erstere sind einfache und letztere zusammengesetzte Zahlen.

3) Läßt sich eine Zahl durch eine andere Zahl ohne Rest dividiren, so ist letztere ein Faktor der ersteren, und umgekehrt kann ein Produkt durch jeden seiner Faktoren ohne Rest getheilt werden.

4) Kennt man von einer Zahl einen Faktor, so erhält man den anderen Faktor oder das Produkt der übrigen Faktoren mittels Division der Zahl durch den bekannten Faktor [§ 8, 2) b)].

5) Zur Zerlegung kleinerer Zahlen in ihre Primfaktoren kann das aus nachstehenden Beispielen zu ersehende Verfahren angewendet werden, es besteht darin, daß man die gegebene Zahl durch ein einfaches Maß dividirt; der Divisor bildet dann einen einfachen und der Quotient einen einfachen oder zusammengesetzten Faktor der Zahl; der zusammengesetzte Faktor wird wieder ebenso zerlegt und das Verfahren so lange fortgesetzt, bis alle Faktoren einfache sind; also:

$$6 = 2 \times 3.$$
$$8 = 2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2.$$
$$9 = 3 \times 3.$$
$$20 = 2 \times 10 = 2 \times 2 \times 5.$$
$$36 = 2 \times 18 = 2 \times 2 \times 9 = 2 \times 2 \times 3 \times 3.$$
$$60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 5.$$
$$108 = 2 \times 54 = 2 \times 2 \times 27 = 2 \times 2 \times 3 \times 9 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3.$$
$$2310 = 2 \times 1155 = 2 \times 3 \times 385 = 2 \times 3 \times 5 \times 77 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11.$$

6) Um eine große Zahl in ihre Primfaktoren zu zerlegen, ist folgendes kürzere, auf demselben Principe beruhende Verfahren vorzuziehen: Man dividire die gegebene Zahl durch ihr kleinstes Maß, den Quotienten wieder durch sein kleinstes Maß, ebenso den neuen Quotienten und fahre so fort, bis sich 1 als Quotient ergibt; alsdann sind alle Divisoren zugleich die verlangten Primfaktoren.

In nachstehendem Beispiele ist die Zahl 13860 in ihre Primfaktoren zerlegt:

13860 : 2
6930 : 2
3465 : 3
1155 : 3
385 : 5
77 : 7
11 : 11
1

Also ist $13860 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$.

7) Eine Zahl, in welcher einfache Faktoren enthalten sind, enthält auch zusammengesetzte Faktoren, welche man aus ersteren erhält, wenn man mit jedem einfachen Faktor jeden vorhergehenden einfachen und zusammengesetzten Faktor multiplicirt, wie aus folgenden 2 Beispielen zu ersehen ist, in welchen links von dem vertikalen Striche die als einfache Faktoren geltenden Divisoren und rechts vom Striche die zusammengesetzten Faktoren sind, von denen man die gleichen nur einmal zu schreiben braucht.

I.	210 : 2	
	105 : 3	6
	35 : 5	10, 15, 30
	7 : 7	14, 21, 35, 42, 70, 105, 210.
	1	

II.	360 : 2	
	180 : 2	4
	90 : 2	8
	45 : 3	6, 12, 24
	15 : 3	9, 18, 36, 72
	5 : 5	10, 15, 20, 40, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.
	1	

§ 35.

Uebungs-Aufgaben.

a) Man zerlege folgende Zahlen in ihre Primfaktoren:
420; 1260; 1386; 264; 315; 3300; 1170; 2380; 4389; 35112. 4725; 10395; 4092; 3096; 86250; 94875; 26532; 33495; 20916; 240075.

b) Nachstehende Zahlen sollen in ihre einfachen und zusammengesetzten Faktoren zerlegt werden:
30; 70; 385; 1001; 1463; 345; 430; 60; 180; 210; 462; 294; 900; 378; 216; 432; 1575; 11025; 2310; 25410; 5775; 190575;

Zweiter Abschnitt.

Von den gemeinen Brüchen.

§ 36.

Erklärungen.

1) Ein Bruch oder eine gebrochene Zahl drückt einen oder mehrere gleiche Theile von einem Ganzen aus und besteht aus zwei unter einander stehenden, durch einen Strich von einander getrennten Zahlen, z. B. $\frac{3}{4}$. Die obere Zahl (3) heißt Zähler und zeigt an, wie viele Theile dem Ganzen entnommen sind; die untere Zahl (4) heißt Nenner und gibt an, in wie viele gleiche Theile das Ganze getheilt wurde; der Strich wird Bruchstrich genannt. Der Bruch $\frac{3}{4}$ sagt sonach, man habe aus dem Ganzen 4 gleiche Theile gemacht und davon 3 Theile weggenommen. Beim Aussprechen eines Bruches kommt zuerst der Zähler, dann der Nenner mit der angehängten Sylbe „tel" (von Theil); $\frac{3}{4}$ wird demnach ausgesprochen: drei Viertel.

2) Das in Theile getheilte Ganze gilt als Einheit. Ein Bruch, dessen Zähler so groß ist wie der Nenner, enthält genau alle Theile eines Ganzen und ist daher der Einheit (1) gleich; also $\frac{8}{8} = 1$, $\frac{12}{12} = 1$, $\frac{27}{27} = 1$. Ist der Zähler kleiner als der Nenner, wie in $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{20}$, so umfaßt der Bruch nicht alle Theile eines Ganzen und ist daher weniger werth als 1. Uebertrifft dagegen der Zähler den Nenner an Größe, wie in $\frac{11}{8}$, $\frac{17}{6}$, $\frac{36}{11}$, so schließt der Bruch die Theile von mehr als 1 Einheit in sich und gilt also mehr als 1.

3) Der Nenner bezeichnet die Anzahl aller Theile eines Ganzen, so oft daher der Nenner im Zähler enthalten ist, so viele Ganze oder Einheiten enthält der Bruch. Um also die Ganzen aus einem Bruche zu erhalten, hat man mit dem Nenner in den Zähler zu dividiren; der Quotient gibt dann die Ganzen und ein etwaiger Rest noch einen oder mehrere Theile von einem weiteren Ganzen; z. B. $\frac{25}{7}$ enthält 3 Ganze und noch 4 Theile von einem vierten Ganzen, folglich ist $\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7}$; ferner $\frac{47}{9} = 5 + \frac{2}{9}$ und $\frac{100}{3} = 33 + \frac{1}{3}$.

4) Jeder Bruch stellt eine Division dar, von welcher der Zähler Dividend und der Nenner Divisor ist; der Bruchstrich gilt

als Divisions-Zeichen. Daher kann jede Division auch in Bruchform geschrieben werden, z. B. $53:11 = \frac{53}{11} = 4 + \frac{9}{11}$.

5) Die Brüche werden in eigentliche und uneigentliche eingetheilt.

1. Eigentlich heißt ein Bruch, wenn er außer den Ganzen auch noch überschüssige Theile enthält, welche kein vollständiges Ganzes mehr geben, wie $\frac{28}{5}$ ($= 5 + \frac{3}{5}$), $\frac{46}{7}$, $\frac{85}{12}$;

2. uneigentlich, wenn er nur Ganze in sich schließt, wie $\frac{18}{6}$ ($= 3$), $\frac{48}{8}$, $\frac{75}{15}$.

Von den eigentlichen Brüchen unterscheidet man wieder:

a. echte, deren Zähler kleiner ist als der Nenner, wie $\frac{5}{16}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{18}$;

b. unechte, deren Zähler größer ist als der Nenner, wie $\frac{7}{5}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{19}{10}$.

6) Eine Summe aus einer ganzen Zahl und einem Bruche wird gewöhnlich abgekürzt geschrieben, indem man die Ganzen links neben den Bruch setzt und das + Zeichen wegläßt; so abgekürzt heißt sie ein gemischter Bruch. Z. B. $9 + \frac{3}{7} = 9\frac{3}{7}$, $6\frac{5}{6}$, $14\frac{2}{3}$.

7) Ein gemischter Bruch wird in einen unechten verwandelt, wenn man den Nenner mit den Ganzen multiplicirt, zum erhaltenen Produkte den Zähler addirt und dieser Summe wieder den Nenner des gemischten Bruches gibt, z. B. $8\frac{7}{12} = \frac{103}{12}$.

Denn ein Ganzes hat $\frac{12}{12}$, folglich geben 8 Ganze 8 mal 12 Zwölftel, d. i. 96 Zwölftel, hiezu noch die schon vorhandenen $\frac{7}{12}$ addirt, macht 103 Zwölftel, also $8\frac{7}{12} = \frac{103}{12}$; ebenso $12\frac{3}{4} = \frac{51}{4}$ $6\frac{8}{11} = \frac{74}{11}$.

8) Aus jeder ganzen Zahl wird ein Bruch unbeschadet des Werthes, wenn man ihr die Einheit als Nenner gibt; z. B. $5 = \frac{5}{1}$; $18 = \frac{18}{1}$; $42 = \frac{42}{1}$.

9) Der Werth eines Bruches ist um so größer, je größer sein Zähler ist, d. h. je mehr Theile vorhanden sind [1)]. Daher hat von mehreren Brüchen mit gleichen Nennern derjenige den größten Werth, der den größten Zähler hat; z. B. von $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ enthält $\frac{7}{8}$ den größten und $\frac{1}{8}$ den kleinsten Werth.

10) Der Werth eines Bruches ist um so kleiner, je

größer sein Nenner ist, d. h. je mehr Theile man aus dem Ganzen oder der Einheit gemacht hat, also je kleiner die Theile sind [1)]. Somit hat von mehreren Brüchen mit gleichen Zählern derjenige den kleinsten Werth, welcher den größten Nenner hat; z. B. von $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{7}{20}$ hat $\frac{7}{20}$ den kleinsten und $\frac{7}{2}$ den größten Werth.

§ 37.

1) Ein Bruch kann auf doppelte Art mit einer ganzen Zahl vervielfacht oder multiplicirt werden, indem man entweder a) den Zähler multiplicirt, oder b) den Nenner dividirt. Z. B.

a) $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3 \times 4}{8} = \frac{12}{8}$; b) $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{8:4} = \frac{3}{2}$.

Denn der Zähler bezeichnet die Anzahl der vorhandenen Theile, multiplicirt man nun den Zähler z. B. mit 4, so erhält der Bruch viermal so viele Theile, also auch den vierfachen Werth. [§ 36, 9)].

Oder wird der Nenner durch 4 dividirt, d. h. 4 mal kleiner gemacht, so erhält die Einheit, da der Nenner anzeigt, wie viele Theile aus der Einheit gemacht wurden, 4 mal weniger, aber deßhalb auch 4 mal größere Theile, somit der Bruch einen 4 mal größeren Werth [§ 36, 10)].

2) Ebenso kann ein Bruch auf doppelte Art durch eine ganze Zahl dividirt werden, wenn man entweder a) den Zähler dividirt, oder b) den Nenner multiplicirt. Z. B.

a) $\frac{6}{11} : 3 = \frac{6:3}{11} = \frac{2}{11}$; b) $\frac{6}{11} : 3 = \frac{6}{11 \times 3} = \frac{6}{33}$.

Denn dividirt man den Zähler z. B. durch 3, so bekommt der Bruch 3 mal weniger Theile, somit einen 3 mal kleineren Werth.

Oder multiplicirt man den Nenner mit 3, so erhält die Einheit 3 mal mehr, aber auch 3 mal kleinere Theile, daher der Bruch einen 3 mal kleineren Werth.

§ 38.

Uebungs-Aufgaben.

1) Man führe folgende Multiplikationen auf die bequemere der beiden Arten aus:

a) $\frac{4}{15} \times 8$. b) $\frac{4}{15} \times 5$. c) $\frac{8}{9} \times 3$. d) $\frac{8}{9} \times 7$.
e) $\frac{13}{45} \times 11$. f) $\frac{13}{45} \times 15$. g) $\frac{25}{36} \times 12$. h) $\frac{42}{47} \times 10$.
i) $\frac{72}{79} \times 79$. k) $\frac{11}{108} \times 13$. l) $\frac{28}{33} \times 9$. m) $\frac{43}{144} \times 48$.
n) $\frac{24}{49} \times 20$. o) $\frac{30}{31} \times 19$. p) $\frac{37}{81} \times 27$. q) $\frac{17}{69} \times 23$.

2) Man führe die nachstehenden Divisionen auf die leichtere der beiden Arten aus:

a) $\frac{12}{13} : 6$. b) $\frac{16}{25} : 9$. c) $\frac{21}{22} : 7$. d) $\frac{22}{23} : 11$. e) $\frac{37}{48} : 10$.
f) $\frac{108}{125} : 5$. g) $\frac{144}{147} : 12$. h) $\frac{36}{317} : 18$. i) $\frac{27}{100} : 19$. k) $\frac{150}{241} : 25$.
l) $\frac{42}{61} : 14$. m) $\frac{53}{60} : 21$. n) $\frac{17}{41} : 20$. o) $\frac{51}{53} : 17$. p) $\frac{105}{833} : 35$.
q) $\frac{212}{251} : 300$.

§ 39.

Ein Bruch ändert seinen Werth nicht, wenn man Zähler und Nenner zugleich mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt. Z. B.

$$a)\ \frac{7}{9} = \frac{7 \times 5}{9 \times 5} = \frac{35}{45}; \qquad b)\ \frac{12}{15} = \frac{12 : 3}{15 : 3} = \frac{4}{5}.$$

Denn durch das Multipliciren des Zählers z. B. mit 5 erhält auch der Bruch einen 5 mal größeren Werth, aber durch das Multipliciren des Nenners mit eben derselben Zahl wird dieser 5fache Werth des Bruches wieder 5 mal kleiner; folglich bleibt der ursprüngliche Werth des Bruches unverändert.

Durch das Dividiren des Zählers z. B. mit 3 erhält der Bruch einen 3 mal kleineren Werth, aber dieser 3 mal kleinere Werth des Bruches wird durch das Dividiren des Nenners mit eben derselben Zahl wieder 3 mal größer; folglich ändert sich der ursprüngliche Werth des Bruches nicht.

Durch das Multipliciren des Zählers und Nenners mit ein und derselben Zahl werden dieselben größer und durch das Dividiren kleiner; daher heißt ersteres Verfahren das Vergrößern oder Ausdehnen und letzteres das Verkleinern, Vereinfachen oder Reduciren der Brüche.

Uebungs-Aufgaben.

Man vereinfache nachstehende Brüche:

$\frac{12}{18}$, $\frac{15}{100}$, $\frac{48}{108}$, $\frac{144}{288}$, $\frac{144}{1728}$, $\frac{207}{333}$, $\frac{594}{684}$, $\frac{3690}{5940}$, $\frac{1375}{1925}$, $\frac{756}{1008}$, $\frac{85200}{40150}$, $\frac{1001}{1078}$,
$\frac{1728}{15552}$, $\frac{1260}{3780}$, $\frac{1764}{7056}$, $\frac{1008}{12096}$.

§ 40.

1) Brüche mit gleichen Nennern heißen gleichnamig, wie $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$; mit ungleichen Nennern ungleichnamig, wie $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{11}{15}$.

2) Ungleichnamige Brüche können gleichnamig gemacht werden, wenn man jeden Bruch mit derjenigen Zahl vergrößert, durch welche sein Nenner dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen aller Nenner gleich wird. Dieses kleinste gemeinsame Vielfache wird gemeinsamer Nenner für alle Brüche. Als vergrößernde Zahl paßt immer der Quotient aus dem gemeinsamen Nenner und dem treffenden Spezialnenner. Hieraus ergibt sich die Regel:

Ungleichnamige Brüche werden gleichnamig gemacht, wenn man ihnen das kleinste gemeinsame Vielfache ihrer Nenner als gemeinsamen Nenner gibt, hierauf mit jedem Spezialnenner in den gemeinsamen Nenner dividirt und mit dem erhaltenen Quotienten den zugehörigen Zähler multiplicirt.

I. Beispiel.

Die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$ sollen gleichnamig gemacht werden. (Siehe § 32.)

Auflösung. $\frac{3}{4}, \frac{8}{15}, \frac{5}{6}, \frac{7}{10} = \frac{45,\ 32,\ 50,\ 42}{60}$.

4, 15, 6, 10	: 2
2, 15, 3, 5	: 3
2, 5, 1, 5	: 5
2, 1, 1, 1	2
	60

II. Beispiel.

$\frac{5}{12}, \frac{13}{18}, \frac{1}{6}, \frac{3}{4}, \frac{17}{24}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{4}{9}$
$= \frac{30,\ 52,\ 12,\ 54,\ 51,\ 48,\ 36,\ 63,\ 32}{72}$.

18, 24	: 2
9, 12	: 3
3, 4	3
	4
	72

Uebungs-Aufgaben.

Man mache nachstehende Brüche gleichnamig:

a) $\frac{9}{10}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{13}{15}$.
b) $\frac{8}{15}$, $\frac{16}{21}$, $\frac{24}{35}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{14}$.
c) $\frac{17}{21}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{11}{14}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$.
d) $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{24}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$.
e) $\frac{23}{54}$, $\frac{17}{18}$, $\frac{14}{27}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{2}{3}$.
f) $\frac{19}{25}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{29}{75}$.

Addition der Brüche.

§ 41.

Bei der Addition von Brüchen ist zu unterscheiden, ob sie gleichnamig oder ungleichnamig sind.

a) Gleichnamige Brüche können addirt werden, weil die durch sie ausgedrückten Theile gleich sind; z. B. $\frac{3}{11} + \frac{5}{11} + \frac{2}{11} = \frac{10}{11}$. Hier hat man 3, 5 und 2 gleiche Theile, zusammen 10 gleiche

Theile; jeder Theil ist ein Elftel, folglich sind es zusammen 10 Elftel oder $\frac{10}{11}$.

Wie man hieraus ersieht, **werden gleichnamige Brüche addirt, indem man bloß die Zähler addirt und unter die erhaltene Summe als Nenner den der Summanden schreibt.**

Bei gemischten Brüchen werden zuerst die Ganzen, dann die Brüche addirt. Ist die erhaltene Summe der Brüche ein unechter Bruch, so nimmt man die Ganzen aus ihm und addirt diese zu der Summe der Ganzen; ein etwa noch bleibender echter Bruch wird noch vereinfacht, wenn es möglich ist. Z. B.

$8\frac{7}{12} + 6\frac{5}{12} + 27\frac{1}{12} + \frac{11}{12} + 45\frac{9}{12} = 86\frac{33}{12} = 88\frac{9}{12} = 88\frac{3}{4}$.

b) Ungleichnamige Brüche können als solche nicht addirt werden, weil ihre Theile verschiedene Größe haben; z. B. $\frac{3}{8}$ und $\frac{2}{3}$ geben zusammen weder $\frac{5}{8}$, noch $\frac{5}{3}$; so wenig als 3 Pfennige und 2 Mark zusammen 5 Pfennige oder 5 Mark geben.

Ungleichnamige Brüche müssen zuerst nach § 40, 2) gleichnamig gemacht werden, dann kann man sie addiren.

I. Beispiel.

$$\frac{8}{15} + \frac{7}{10} + \frac{3}{4} + \frac{5}{12} + \frac{1}{6} = \frac{32 + 42 + 45 + 25 + 10}{60}$$
$$= \frac{154}{60} = 2\frac{34}{60} = 2\frac{17}{30}.$$

15, 10, 12	: 2
15, 5, 6	: 3
5, 5, 2	: 5
1, 1, 2	2
	60

II. Beispiel.

$$18\frac{2}{9} + 7\frac{3}{4} + \frac{11}{12} + 28\frac{5}{6} = 53\frac{8 + 27 + 33 + 30}{36}.$$
$$= 53\frac{98}{36} = 55\frac{26}{36} = 55\frac{13}{81}.$$

9, 12	: 3
3, 4	3
	4
	36

§ 42.

Uebungs-Aufgaben.

Man führe folgende Additionen aus:

1) von gleichnamigen Brüchen:

a) $\frac{4}{9} + \frac{8}{9} + \frac{7}{9} + \frac{5}{9}$.
b) $\frac{5}{12} + \frac{11}{12} + \frac{9}{12} + \frac{7}{12} + \frac{1}{12}$.
c) $\frac{17}{24} + \frac{19}{24} + \frac{23}{24} + \frac{13}{24} + \frac{7}{24} + \frac{5}{24}$.
d) $25\frac{3}{8} + 6\frac{7}{8} + 43\frac{1}{8} + 7\frac{5}{8}$.
e) $48\frac{7}{15} + 36\frac{14}{15} + 9\frac{8}{15} + 13\frac{13}{15} + 8\frac{4}{15}$.
f) $36\frac{7}{18} + 21\frac{17}{18} + 5\frac{13}{18} + 16\frac{1}{18} + 20\frac{11}{18}$.

g) $17\frac{11}{20} + 9\frac{3}{20} + 41\frac{13}{20} + 33\frac{7}{20} + 2\frac{17}{20} + 30\frac{13}{20}$.
h) $19\frac{23}{48} + 75\frac{47}{48} + 4\frac{19}{48} + 27\frac{37}{48} + \frac{5}{48} + 3\frac{29}{48} + \frac{31}{48}$.
i) $6\frac{47}{120} + 318\frac{113}{120} + \frac{77}{120} + 8\frac{116}{120} + \frac{7}{120} + 18\frac{97}{120}$.
k) $36\frac{17}{96} + \frac{95}{96} + 6\frac{83}{96} + 47\frac{37}{96} + 28 + 19\frac{73}{96}$.

2) Von ungleichnamigen Brüchen:

a) $\frac{7}{12} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$.
b) $\frac{5}{8} + \frac{1}{6} + \frac{19}{24} + \frac{11}{12} + \frac{1}{2}$.
c) $\frac{17}{18} + \frac{1}{4} + \frac{7}{12} + \frac{8}{9} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3}$.
d) $9\frac{15}{16} + 17\frac{23}{24} + 3\frac{3}{8} + 48\frac{5}{12}$.
e) $36\frac{14}{15} + 8\frac{23}{24} + 17\frac{9}{10} + \frac{17}{20} + 58\frac{11}{12}$.
f) $39\frac{13}{18} + 6\frac{19}{24} + \frac{5}{8} + 37\frac{4}{9} + 80\frac{1}{12}$.
g) $45\frac{26}{27} + 5\frac{8}{9} + \frac{5}{6} + 16\frac{17}{18} + 68\frac{3}{4}$.
h) $11\frac{14}{15} + 13\frac{4}{5} + 48\frac{24}{25} + 3\frac{2}{3}$
i) $26\frac{43}{48} + \frac{5}{9} + 14\frac{7}{12} + \frac{3}{8} + 75\frac{29}{36}$.
k) $65\frac{35}{36} + 19\frac{9}{10} + \frac{4}{5} + 17\frac{17}{18} + 49\frac{8}{9}$.
l) $28\frac{13}{14} + \frac{1}{2} + 29\frac{4}{7} + 25\frac{7}{10} + 308\frac{2}{5}$.
m) $53\frac{21}{22} + 48\frac{10}{11} + 15\frac{3}{4} + \frac{3}{8} + 33\frac{15}{16} + 5\frac{1}{2}$.

Subtraction der Brüche.

§ 43.

1) Wie bei der Addition, so ist auch bei der Subtraction zu unterscheiden, ob die Brüche gleich- oder ungleichnamig sind, und es gelten hier dieselben Unterscheidungsgründe wie dort.

2) Gleichnamige Brüche lassen sich von einander subtrahiren, da ihre Theile gleich sind, z. B. $\frac{6}{7} - \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$. Hier sind 4 Theile von 6 Theilen zu subtrahiren, es bleiben 2 Theile als Rest; aber jeder Theil ist ein Siebentel, folglich geben 4 Siebentel von 6 Siebenteln subtrahirt 2 Siebentel.

3) Ungleichnamige Brüche können als solche nicht subtrahirt werden, sondern sind zuerst gleichnamig zu machen. Denn der eine Bruch drückt kleinere, der andere größere Theile aus; man kann daher nicht, wie in $\frac{7}{8} - \frac{2}{3}$ verlangt ist, 2 größere Theile wegnehmen, wo 7 lauter kleinere Theile sind, wenn gleich der Werth von $\frac{2}{3}$ den von $\frac{7}{8}$ nicht übersteigt.

4) Wie aus 2) zu ersehen ist, **werden gleichnamige Brüche von einander subtrahirt, indem man nur die Zähler von einander subtrahirt und dem erhaltenen Reste den nämlichen Nenner gibt, welchen der Minuend und Subtrahend haben**; z. B. $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$.

5) Bei gemischten Brüchen werden zuerst die Ganzen und dann die Brüche von einander subtrahirt, z. B. $18\frac{6}{11} - 15\frac{2}{11} = 3\frac{4}{11}$.

6) Ist der Bruch des Minuenden kleiner als der des Subtrahenden: so muß man vor Allem durch Entlehnen dem ersteren Bruche einen höheren Werth geben, indem man von seinen Ganzen eine Einheit nimmt, aus dieser einen Bruch macht, welcher gleichen Zähler und Nenner hat und mit den gegebenen Brüchen gleichnamig ist, hierauf den erhaltenen Bruch zu dem des Minuenden addirt; dann erst kann die Subtraction vollzogen werden. Der kürzeren Schreibweise wegen kann man den gegebenen Zähler des Minuenden durchstreichen und den neuen gleich darüber schreiben. Z. B.

$$15\frac{\overset{25}{\not{7}}}{18} - 8\frac{13}{18} = 6\frac{12}{18} = 6\frac{2}{3}.$$

7) Ist der Minuend nur eine ganze Zahl ohne Bruch, so hat man einen Bruch zu ergänzen, da sich nur Bruch von Bruch abziehen läßt. Zu diesem Behufe macht man aus einem Einer des Minuenden einen Bruch, welcher gleichen Zähler und Nenner hat und mit dem Bruche des Subtrahenden gleichnamig ist; dann kann die Subtraction ausgeführt werden. Z. B.

$$24 - 16\frac{3}{5} = 23\frac{5}{5} - 16\frac{3}{5} = 7\frac{2}{5}.$$

8) Bei einer Subtraction, deren Subtrahend eine ganze Zahl ohne Bruch ist, braucht man keinen Bruch zu ergänzen, da kein Bruch abzuziehen ist; z. B.

$$36\frac{8}{13} - 12 = 24\frac{8}{13}.$$

9) Sind die Brüche ungleichnamig und gemischt, so werden zuerst die Ganzen von einander subtrahirt, dann die Brüche gleichnamig gemacht und von einander subtrahirt. Ist dabei zu entlehnen, so wird dies erst vorgenommen, nachdem die Brüche gleichnamig gemacht sind. Z. B.

I. $19\frac{17}{18} - 10\frac{13}{24} = 9\frac{68-39}{72} = 9\frac{29}{72}.$

18, 24	: 2
9, 12	: 3
3, 4	3
	4
	72

II. $48\frac{4}{15} - 25\frac{3}{5} = 23\frac{\overset{19}{\not{4}}-9}{15} = 22\frac{10}{15} = 22\frac{2}{3}.$

§ 44.

Uebungs-Aufgaben.

Man führe nachstehende Subtractionen aus:

a) $12\frac{9}{10} - 7\frac{3}{10}$.	k) $45 - 29\frac{14}{17}$.	t) $15\frac{13}{21} - 12\frac{15}{25}$.
b) $24\frac{7}{12} - 15\frac{5}{12}$.	l) $73 - \frac{29}{36}$.	u) $56\frac{25}{32} - \frac{11}{16}$.
c) $35\frac{17}{24} - \frac{5}{24}$.	m) $49 - 27\frac{15}{26}$.	v) $63\frac{4}{9} - 35\frac{16}{17}$.
d) $41\frac{13}{20} - 29\frac{17}{20}$.	n) $16\frac{3}{4} - 5$.	w) $33\frac{5}{8} - 22\frac{8}{9}$.
e) $29\frac{11}{18} - 14\frac{13}{18}$.	o) $32\frac{18}{23} - 14$.	x) $100\frac{25}{48} - 69\frac{8}{9}$.
f) $36\frac{3}{14} - 19\frac{9}{14}$.	p) $13\frac{7}{8} - 13$.	y) $35\frac{29}{42} - \frac{27}{35}$.
g) $38\frac{11}{21} - \frac{20}{21}$.	q) $30\frac{29}{42} - 18$.	z) $52\frac{8}{15} - 36\frac{13}{18}$.
h) $23 - 16\frac{5}{8}$.	r) $22\frac{11}{12} - 8\frac{7}{9}$.	
i) $48 - 35\frac{16}{19}$.	s) $46\frac{17}{24} - 27\frac{11}{18}$.	
aa) $38\frac{37}{40} - 15\frac{17}{40}$.	ak) $19\frac{12}{13} - 18$.	at) $35\frac{11}{32} - 28\frac{23}{24}$
ab) $19\frac{23}{45} - 13\frac{32}{45}$.	al) $72\frac{57}{65} - 47\frac{8}{13}$.	au) $17\frac{5}{21} - 10\frac{13}{21}$.
ac) $26 - 19\frac{4}{15}$.	am) $15\frac{23}{36} - 6\frac{41}{48}$.	av) $80 - 53\frac{18}{29}$.
ad) $34\frac{14}{19} - 16$.	an) $12 - 10\frac{5}{11}$.	aw) $30\frac{17}{38} - 14$.
ae) $35\frac{8}{11} - 28\frac{14}{33}$.	ao) $28\frac{8}{30} - 16\frac{17}{45}$.	ax) $109 - 78\frac{112}{345}$.
af) $24\frac{2}{5} - 14\frac{9}{14}$.	ap) $48\frac{6}{11} - 29\frac{28}{33}$.	ay) $38\frac{19}{42} - 19\frac{29}{42}$.
ag) $17\frac{17}{22} - 13\frac{15}{22}$.	aq) $17\frac{9}{25} - 13\frac{17}{25}$.	az) $90\frac{16}{21} - 73\frac{23}{24}$.
ah) $108\frac{22}{39} - 75\frac{35}{39}$.	ar) $18\frac{5}{9} - 14\frac{11}{18}$.	
ai) $56 - \frac{25}{32}$.	as) $49\frac{19}{45} - 28\frac{13}{13}$.	

Multiplication der Brüche.

§ 45.

1) Brüche werden mit einander multiplicirt, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt und das Produkt der Zähler durch das der Nenner dividirt. Z. B. $\frac{7}{9} \times \frac{5}{6} = \frac{35}{54}$.

Denn soll $\frac{7}{9}$ mit $\frac{5}{6}$ multiplicirt werden und multiplicirt man $\frac{7}{9}$ mit dem Zähler 5 nach § 37, also $\frac{7}{9} \times 5 = \frac{7 \times 5}{9}$: so ist der Multiplikator 6 mal zu groß, weil $\frac{5}{6}$ bloß den 6. Theil von 5 bedeutet, und erhält man dadurch ein 6mal zu großes Produkt. Daher ist $\frac{7 \times 5}{9}$ noch durch den Nenner 6 zu dividiren (nach § 37), was sodann $\frac{7 \times 5}{9 \times 6} = \frac{35}{54}$ gibt. Demgemäß ist $\frac{7}{9} \times \frac{5}{6} = \frac{7 \times 5}{9 \times 6} = \frac{35}{54}$.

2) Ebenso lassen sich nach derselben Regel auch mehr als 2 Brüche mit einander multipliciren, z. B.

$$\frac{3}{4} \times \frac{7}{10} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{63}{640}.$$

Zu dessen Begründung denke man sich zuerst 2 Brüche mit einander multiplicirt, das erhaltene Produkt mit dem 3. Bruch multiplicirt u. s. f., bis so nach und nach mit allen Brüchen multiplizirt ist.

3) Gemischte Brüche werden vor dem Multipliciren in unechte verwandelt, z. B.

$$4\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{5} \times 3\frac{4}{9} = \frac{14}{3} \times \frac{11}{5} \times \frac{31}{9} = \frac{4774}{135} = 35\frac{49}{135}.$$

4) Die Multiplikation von Brüchen kann vereinfacht werden, indem man je einen beliebigen Zähler und Nenner zugleich durch ein gemeinsames Maß dividirt; dies darf aber erst geschehen, nachdem die gemischten Brüche in unechte verwandelt sind. Beim Vereinfachen durchstreiche man die vereinfachten Zähler und Nenner, schreibe die Quotienten über die Zähler und unter die Nenner und führe endlich die Multiplikation mit den noch geltenden Zählern und Nennern aus. Z. B.

$$\text{I. } 5\frac{5}{8} \times 6\frac{2}{3} = \frac{\overset{15}{\cancel{45}}}{\underset{2}{\cancel{8}}} \times \frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}.$$

$$\text{II. } 2\frac{3}{4} \times 8\frac{5}{9} \times 5\frac{5}{7} \times 3\frac{7}{11} = \frac{\overset{1}{\cancel{11}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times \frac{\overset{11}{\cancel{77}}}{9} \times \frac{\overset{10}{\cancel{40}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} \times \frac{40}{\underset{1}{\cancel{11}}} = \frac{4400}{9} = 488\frac{8}{9}.$$

5) Kommt bei einer Multiplikation eine ganze Zahl ohne Bruch als Faktor vor, so kann man ihr auch die Bruchform verleihen, indem man ihr 1 als Nenner gibt, und dann die Multiplication mit lauter Brüchen ausführen. Z. B.

$$\text{I. } 12 \times 2\frac{3}{4} = \frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{1} \times \frac{11}{\underset{1}{\cancel{4}}} = \frac{33}{1} = 33.$$

$$\text{II. } 4\frac{1}{2} \times 8 \times 3\frac{2}{3} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} \times \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{1} \times \frac{11}{\cancel{3}} = \frac{132}{1} = 132.$$

§ 46.

Uebungs-Aufgaben.

Man führe nachstehende Multiplikationen aus:

a) $\frac{15}{16} \times \frac{5}{7}$

b) $\frac{4}{9} \times \frac{5}{11}$.

c) $\frac{30}{31} \times \frac{41}{53}$.

d) $\frac{13}{17} \times \frac{11}{20}$.

e) $\frac{2}{5} \times \frac{7}{9} \times \frac{1}{3}$.

f) $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{11}$.

g) $2\frac{3}{4} \times 3\frac{2}{7}$.

h) $6\frac{7}{10} \times 4\frac{1}{15}$.

i) $6\frac{4}{5} \times 2\frac{1}{17}$.

k) $8\frac{4}{9} \times 6\frac{3}{8}$.

l) $5\frac{5}{6} \times 9\frac{3}{5} \times 8\frac{4}{7}$.

m) $9\frac{1}{10} \times \frac{5}{12} \times 2\frac{5}{14}$.

n) $8\frac{7}{8} \times 5\frac{4}{9} \times 5 \times 6\frac{6}{7}$.

o) $4\frac{8}{9} \times 3\frac{4}{7} \times 3 \times 5\frac{5}{8}$.

p) $2\frac{7}{12} \times 2 \times 8\frac{8}{9} \times 1\frac{8}{25}$.

q) $5\frac{7}{9} \times 2\frac{5}{8} \times 6\frac{3}{4} \times 2\frac{4}{13}$.

r) $8\frac{5}{8} \times 6\frac{3}{10} \times 4\frac{2}{7} \times 2\frac{2}{15}$.

s) $4\frac{4}{11} \times 9\frac{4}{7} \times 13\frac{3}{4} \times 3$.

t) $15\frac{3}{7} \times 1\frac{13}{24} \times 4 \times 3\frac{2}{11}$.

u) $5\frac{5}{12} \times 4\frac{6}{11} \times 2\frac{4}{13}$.

v) $4\frac{8}{9} \times 8\frac{4}{7} \times 2\frac{3}{8}$.

w) $6\frac{5}{7} \times 3\frac{3}{8} \times 2\frac{2}{9}$.

x) $8\frac{8}{9} \times 15 \times 4\frac{3}{8} \times 2\frac{3}{7}$.

y) $8\frac{4}{7} \times 12 \times 2\frac{1}{24} \times 3\frac{2}{17}$.

z) $6\frac{7}{8} \times 4\frac{4}{9} \times 2\frac{1}{11} \times \frac{3}{7}$.

aa) $5\frac{3}{4} \times 8\frac{2}{9} \times 3\frac{3}{23} \times 8 \times 5\frac{6}{7}$.

ab) $5\frac{1}{16} \times 2\frac{5}{27} \times 7\frac{3}{7}$.

Division der Brüche.

§ 47.

1) Zwei Brüche werden durch einander dividirt, indem man durch Umstürzen des Divisors aus der Division eine Multiplikation macht und diese ausführt; z. B.

$$\frac{3}{8} : \frac{7}{9} = \frac{3}{8} \times \frac{9}{7} = \frac{27}{56}.$$

Denn soll $\frac{3}{8}$ durch $\frac{7}{9}$ dividirt werden und dividirt man $\frac{3}{8}$ durch 7 (nach § 37), also $\frac{3}{8} : 7 = \frac{3}{8 \times 7}$, so ist der Divisor 9mal zu groß, weil $\frac{7}{9}$ nur den 9. Theil von 7 bedeutet, und erhält man deßhalb einen 7mal zu kleinen Quotienten. Daher ist $\frac{3}{8 \times 7}$ noch mit 9 zu multipliciren (nach § 37.), was $\frac{3 \times 9}{8 \times 7}$ gibt; also ist $\frac{3}{8} : \frac{7}{9} = \frac{3 \times 9}{8 \times 7} = \frac{27}{56}$.

2) Bei einer Division von gemischten Brüchen sind diese vor Allem in unechte zu verwandeln, wobei Kürze halber zugleich auch das Umstürzen des Divisors stattfinden kann; z. B.

$$8\frac{4}{9} : 3\frac{7}{15} = \frac{\overset{19}{\cancel{76}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \times \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{13}{\cancel{52}}} = \frac{95}{39} = 2\frac{17}{39}.$$

3) Eine ganze Zahl wird durch einen Bruch oder ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man der Zahl 1 als Nenner gibt und sonach die Division mit 2 Brüchen ausführt. Z. B.

a) $8 : \frac{4}{5} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{1} \times \frac{5}{\underset{1}{\cancel{4}}} = \frac{10}{1} = 10.$

b) $9 : 3\frac{6}{7} = \frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{1} \times \frac{7}{\underset{3}{\cancel{27}}} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$

c) $\frac{18}{25} : 12 = \frac{\overset{3}{\cancel{18}}}{25} \times \frac{1}{\underset{2}{\cancel{12}}} = \frac{3}{50}.$

d) $8\frac{2}{11} : 15 = \frac{\overset{6}{\cancel{90}}}{11} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{15}}} = \frac{6}{11}.$

§ 48.

Uebungs-Aufgaben.

Man führe folgende Divisionen aus:

a) $\frac{5}{8} : \frac{7}{9}$.	g) $18 : \frac{15}{16}$.	n) $8\frac{10}{11} : 2\frac{4}{33}$.	t) $8\frac{8}{15} : 6\frac{2}{25}$.
b) $\frac{9}{11} : \frac{2}{3}$.	h) $7\frac{1}{5} : 3\frac{21}{25}$.	o) $6\frac{7}{8} : 2\frac{1}{12}$.	u) $7\frac{7}{20} : 3\frac{4}{15}$.
c) $\frac{17}{18} : \frac{5}{6}$.	i) $5\frac{5}{18} : 2\frac{7}{24}$.	p) $7\frac{5}{9} : 3\frac{5}{27}$.	v) $9\frac{7}{9} : 4\frac{7}{12}$.
d) $\frac{9}{10} : \frac{6}{25}$.	k) $9\frac{3}{7} : 6\frac{1}{9}$.	q) $6\frac{6}{7} : 2\frac{19}{28}$.	w) $12 : 6\frac{6}{7}$.
e) $\frac{16}{25} : \frac{12}{35}$.	l) $9\frac{5}{8} : 4\frac{7}{12}$.	r) $7\frac{7}{9} : 4\frac{1}{12}$.	x) $15 : 5\frac{5}{6}$.
f) $20 : \frac{24}{25}$.	m) $9\frac{7}{11} : 2\frac{5}{22}$.	s) $9\frac{3}{7} : 2\frac{5}{14}$.	y) $8\frac{4}{5} : 11$.

z) $11\frac{1}{9} : 25$.

Zusammengesetzte Bruchrechnungen.

§ 49.

Aggregate.

Was auf den Seiten 10 und 11 über ganze Zahlen gesagt ist, gilt im Wesentlichen auch für Brüche.

a) $16\frac{5}{8} - 4\frac{3}{8} + 7\frac{1}{8}$.
b) $12\frac{8}{9} + 5\frac{4}{9} - 11\frac{7}{9} - 4\frac{2}{9}$.
c) $25\frac{7}{18} - 12\frac{13}{18} + 4\frac{5}{18} - 8\frac{11}{18}$.
d) $2\frac{8}{15} - 10\frac{14}{15} - 5\frac{4}{15} + 9\frac{11}{15} - 17\frac{1}{15}$.
e) $7\frac{9}{20} - 12\frac{5}{12} + 9\frac{7}{20} - 2\frac{11}{12}$.
f) $14\frac{2}{5} - 6\frac{7}{10} + 8\frac{4}{5} - 7\frac{1}{2}$.
g) $9\frac{7}{12} - 5\frac{17}{18} - \frac{23}{24} + 2\frac{5}{6} + 8\frac{8}{9}$.
h) $13\frac{11}{15} + 6\frac{4}{5} - \frac{2}{9} + 18\frac{1}{3} - 10\frac{9}{10}$.
i) $16\frac{7}{8} - 11\frac{3}{5} - 1\frac{7}{10} + 5\frac{19}{20} - 4\frac{3}{4}$.
k) $8\frac{37}{48} + 15\frac{19}{24} - \frac{13}{18} + 9\frac{8}{9} - \frac{7}{8}$.
l) $28\frac{11}{21} - \frac{3}{4} - 16\frac{2}{7} + 8\frac{9}{14} - 15$.
m) $31\frac{9}{10} - 2\frac{47}{60} + \frac{23}{25} - 11\frac{3}{5} - 6\frac{3}{4}$.

§ 50.

Kommen in einem Aggregate Produkte oder Quotienten als Glieder vor, so sind diese zuerst zu berechnen, dann erst wird addirt und subtrahirt.

a) $15\frac{3}{5} - \frac{2}{9} \times \frac{6}{7} + 2\frac{4}{15} : 3\frac{2}{5} - 12\frac{18}{35}$.
b) $8\frac{2}{5} : \frac{7}{45} - 18\frac{5}{18} - 6\frac{4}{9} \times 2\frac{7}{16} + 5\frac{11}{12}$.
c) $9\frac{6}{11} \times 2\frac{2}{35} - 13 : 9\frac{3}{7} + \frac{5}{198} \times 3\frac{3}{5}$.
d) $6\frac{14}{15} - 2\frac{4}{9} \times 3\frac{2}{5} - 9\frac{3}{7} : 2\frac{5}{14} + 17\frac{41}{45}$.
e) $65 : \frac{13}{17} - 25 - \frac{29}{48} \times 24 + 19\frac{19}{22}$.
f) $9\frac{5}{8} : 4\frac{1}{12} - 7\frac{5}{21} - 15 : 2\frac{6}{7} + 36 \times 4\frac{4}{9}$.
g) $24\frac{8}{25} - 6\frac{1}{15} \times 9\frac{3}{14} + 8\frac{3}{4} : 17\frac{1}{2} - 19\frac{17}{50}$.
h) $27\frac{2}{19} - 16\frac{15}{38} + 45\frac{3}{5} : 2\frac{7}{25} - \frac{25}{76} - 14\frac{2}{5} \times \frac{10}{19}$.
i) $4\frac{4}{9} \times \frac{72}{91} - 8\frac{6}{13} + 9\frac{1}{6} : 5\frac{5}{12} + 29\frac{19}{91} - 4\frac{2}{5} : \frac{7}{10}$.
k) $25 - 6\frac{1}{2} \times 2\frac{23}{26} - 12\frac{15}{16} - 9\frac{8}{9} \times 5\frac{13}{64} + \frac{17}{54} : 1\frac{5}{27}$.

§ 51.

Soll ein Klammer-Ausdruck multiplicirt oder dividirt werden so ist es gewöhnlich am einfachsten, denselben zuerst zu berechnen und dann erst dessen Resultat zu multipliciren oder zu dividiren. Dasselbe gilt auch, wenn 2 oder mehrere Klammer-Ausdrücke durch einander multiplicirt oder dividirt werden sollen.

a) $(6\frac{3}{4} + 3\frac{3}{8}) \times 4\frac{4}{9}$.
b) $(9\frac{6}{7} - 3\frac{9}{14}) \times 6\frac{2}{9}$.
c) $7\frac{1}{8} \times (8\frac{4}{15} + 4\frac{8}{9})$.

d) $9\frac{9}{20} : (11\frac{4}{5} - 5\frac{11}{15})$.
e) $220 \times (8\frac{2}{11} + 12\frac{7}{10})$.
f) $(7\frac{13}{24} - 5\frac{11}{18}) : 10\frac{8}{27}$.
g) $(15\frac{8}{13} + 2\frac{16}{39}) \times 26$.
h) $395 : (16\frac{3}{4} - 5\frac{7}{9})$.
i) $(37 - 28\frac{8}{11}) \times (15\frac{7}{24} - 13\frac{19}{24})$.
k) $(26\frac{19}{21} - 22\frac{11}{15}) : (24\frac{11}{15} - 23\frac{19}{21})$.
l) $(4\frac{7}{8} + 2\frac{5}{12}) \times (5\frac{4}{7} - 3\frac{3}{14})$.
m) $(3 + 2\frac{5}{11}) \times (\frac{5}{8} + \frac{4}{9})$.
n) $(2\frac{7}{10} + 3\frac{4}{5} + 7\frac{8}{15}) : (19\frac{11}{20} - 12\frac{17}{20})$.
o) $(2\frac{17}{18} + \frac{23}{24} + 4\frac{25}{48} + 1\frac{11}{12}) : (25\frac{23}{36} - 25\frac{5}{8})$.
p) $(38\frac{19}{42} - 34\frac{29}{42}) \times (18\frac{13}{18} + 23\frac{11}{18} + 5\frac{7}{18} + 29\frac{5}{18})$.
q) $(3\frac{37}{54} + 2\frac{17}{108} + 4\frac{13}{18}) : (26\frac{29}{36} - 19\frac{23}{24})$.
r) $(27\frac{13}{24} - 16\frac{17}{24}) : (25\frac{13}{20} - 21\frac{14}{15})$.
s) $(18\frac{5}{9} - 14\frac{11}{18}) : (28\frac{4}{15} - 16\frac{17}{45})$.
t) $(12\frac{7}{15} - 8\frac{8}{9} + 3\frac{17}{45} - 4\frac{9}{10}) \times (34 - 24\frac{8}{17})$.
u) $(15\frac{11}{12} - 13\frac{17}{24} - 25\frac{7}{18} + 25\frac{3}{8}) : (20\frac{5}{8} - 7\frac{2}{3} - 8\frac{5}{9})$.
v) $(48\frac{29}{50} + 10\frac{18}{25} - 55\frac{11}{15}) : (9\frac{47}{75} - 19\frac{4}{5} + 12\frac{19}{25} - \frac{2}{3})$.
w) $(16\frac{3}{7} - 19\frac{9}{14} - 26\frac{16}{21} + 33\frac{1}{2}) : (29\frac{11}{12} + 18\frac{19}{21} - 36\frac{3}{4} - 9\frac{37}{84})$.
x) $(9\frac{5}{8} : 4\frac{7}{12} + 5 \times 2\frac{3}{5} - 2\frac{1}{10}) : (70\frac{3}{4} - 7\frac{7}{8} \times 8\frac{4}{7} + 8\frac{10}{11} : 2\frac{4}{33})$.
y) $(9\frac{3}{7} : 2\frac{5}{14} - 4\frac{4}{15} \times \frac{25}{52} + \frac{2}{39}) \times (2\frac{4}{9} \times 6 \times 3\frac{7}{11} \times \frac{5}{8})$.
z) $(2\frac{7}{12} + 1\frac{9}{10} + \frac{5}{6} + 2\frac{17}{24}) : (8\frac{5}{8} \times 6\frac{3}{10} \times 4\frac{2}{7} \times 2\frac{2}{15} \times \frac{3}{23})$.

Dritter Abschnitt.

Dezimalbrüche.

§ 52.

1) Dezimalbrüche sind solche Brüche, welche als Nenner die Einheit mit angehängten Nullen haben, also 10, 100, 1000, 10000 ꝛc., wie $\frac{7}{10}$, $\frac{33}{100}$, $\frac{237}{1000}$, $\frac{29}{10000}$ ꝛc.

Die Dezimalbrüche pflegt man abgekürzt zu schreiben, indem nur die Ganzen und der Zähler geschrieben werden, während man den Nenner sammt dem Bruchstriche wegläßt, zwischen die Ganzen und den Zähler aber ein Komma, den Dezimalstrich, setzt. Der Nenner wird dann aus dem Zähler erkannt, da dieser beim abgekürzten Schreiben eben so viele Stellen erhält, als der Nenner Nullen hat. Für den Fall, daß im Zähler nicht so viele Stellen vorkommen, als im Nenner Nullen sind, ergänzt man die fehlenden Stellen links vom Zähler durch Nullen. Die etwa fehlenden Ganzen werden gleichfalls durch eine Null ersetzt.

Beispiele.

$2\frac{3}{10} = 2{,}3$; $18\frac{27}{100} = 18{,}27$; $5\frac{91}{1000} = 5{,}091$;

$\frac{1917}{10000} = 0{,}1917$; $\frac{43}{100000} = 0{,}00043$; $\frac{8357}{1000000} = 0{,}008357$.

3) Die Stellen des Zählers, also die rechts vom Dezimalstriche, nennt man Dezimalstellen oder Dezimalziffern, während die Stellen links vom Dezimalstriche die Ganzen bedeuten.

4) Nach unserem Dezimal-Zahlensysteme verleiht jede Stelle in einer Zahl der auf ihr befindlichen Ziffer einen 10 mal größeren Werth als die nächst vorhergehende Stelle von rechts nach links, daher umgekehrt von links nach rechts stets einen 10 mal kleineren Werth. Also hat ein Hunderter einen 10 mal kleineren Werth als ein Tausender, ein Zehner einen 10 mal kleineren als ein Hunderter und ein Einer einen 10 mal kleineren als ein Zehner. Schreitet man in dieser Weise noch weiter über die Einer hinaus, so treffen auf die nächste Stelle nach den Einern wieder 10 mal kleinere Einheiten oder Theile, also lauter Zehntel eines Einers, auf die 2. Stelle lauter Zehntel eines Zehntels oder Hundertel eines Einers, auf die 3. Stelle lauter Zehntel eines Hundertels oder Tausendtel eines Einers, auf die 4. Stelle lauter Zehntel eines Tausendtels oder Zehntausendtel eines Einers u. s. w. und hat man hiernach einen Dezimalbruch, dessen Zähler oder Dezimalstellen die Stellen rechts nach den Einern sind, z. B. 8347,391754....

5) Demgemäß hat jede Zifferstelle rechts nach den Einern, d. h. jede Stelle des Zählers eines Dezimalbruches ihren eigenen Nenner. Da nun auch alle Stellen des Zählers ihren gemeinschaftlichen Nenner haben, so unterscheidet man bei einem Dezimalbruche 2 Arten von Nennern: einen allgemeinen Nenner und Spezialnenner und kann somit der Dezimalbruch nach diesen oder jenem ausgesprochen werden. Z. B.

Entweder $34{,}6572 = 34\frac{6572}{10000}$,

d. h. 34 Ganze und 6572 Zehntausendtel;

oder $34{,}6572 = 34 + \frac{6}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{2}{10000}$,

d. h. 34 Ganze 6 Zehntel 5 Hundertel 7 Tausendtel und 2 Zehn-Tausendtel.

6) Zur Uebung spreche man folgende Dezimalbrüche auf doppelte Art aus:

6,25; 18,7; 4,903; 138,0067; 0,273986; 0,432; 16,4; 8,52734; 5,8243; 10,9729328; 0,00521345; 0,16; 8,4928; 0,6; 1,50832;

§ 53.

1) Ein Dezimalbruch ändert seinen Werth nicht, wenn man

a) rechts an seinen Zähler beliebig viele Nullen anhängt, oder

b) solche schon vorhandene Nullen wegläßt; z. B.

a) 0,32 = 0,320 = 0,3200 = 0,32000....
d. h. 0,32 = $\frac{32}{100}$ = $\frac{320}{1000}$ = $\frac{3200}{10000}$ = $\frac{32000}{100000}$....

b) 0,7000 = 0,700 = 0,70 = 0,7,
d. h. 0,7000 = $\frac{7000}{10000}$ = $\frac{700}{1000}$ = $\frac{70}{100}$ = $\frac{7}{10}$.

Wie man aus diesen Beispielen ersieht, entspricht einer jeden solchen hinzugesetzten oder weggelassenen Null des Zählers auch eine hinzugesetzte oder weggelassene Null des Nenners, und wird hiedurch der Bruch nur vergrößert (§ 39), oder beziehungsweise vereinfacht.

2) Jede ganze Zahl kann in Form eines Dezimalbruches geschrieben werden, wenn man rechts nach ihr den Dezimalstrich und als Zähler eine oder mehrere Nullen setzt, z. B. 9 = 9,0 = 9,000; denn 9,0 oder 9,000 bedeutet nicht mehr und nicht weniger als 9 Ganze.

3) Ebenso kann man umgekehrt einen Dezimalbruch, dessen Zähler nur aus Nullen besteht, einfacher als bloße ganze Zahl schreiben, wenn man diese Nullen sammt dem Dezimalstriche wegläßt. Z. B. 5,0 = 5; 18,00 = 18; 3,0000 = 3.

4) Mehrere Dezimalbrüche heißen gleichnamig, wenn sie gleich viele Dezimalstellen haben, z. B. 4,367 + 0,902 + 8,006; ungleichnamig mit ungleich vielen Dezimalstellen, z. B. 0,321 + 1,74 + 2,5038.

5) Ungleichnamige Dezimalbrüche können gleichnamig gemacht werden, wenn man die fehlenden Dezimalstellen rechts vom Zähler durch Nullen ergänzt, z. B. 5,308 + 0,79 + 12,52137 = 5,30800 + 0,79000 + 12,52137.

§ 54.

Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche.

1) Durch passende Vergrößerung oder Vereinfachung lassen

sich gewisse gemeine Brüche in Dezimalbrüche verwandeln, wie aus folgenden Beispielen zu ersehen ist:

a) $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5.$ e) $\frac{84}{2100} = \frac{4}{100} = 0{,}04.$
b) $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75$ f) $\frac{75}{25000} = \frac{3}{1000} = 0{,}003.$
c) $\frac{2}{125} = \frac{16}{1000} = 0{,}016.$ g) $\frac{15}{25} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$
d) $\frac{12}{60} = \frac{2}{10} = 0{,}2$ h) $\frac{27}{36} = \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75.$

Dieses Verfahren ist aber nur dann anwendbar, wenn nach vollständiger Vereinfachung des Bruches der Nenner keine anderen einfachen Faktoren mehr als 2 und 5 enthält.

2) Nach folgendem allgemeinen Verfahren kann jeder beliebige gemeine Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt werden:

Man schreibe zuerst die Ganzen und den Dezimalstrich, hänge hierauf eine Null an den Zähler und dividire dann diesen zehnfachen Zähler durch den Nenner, wodurch man die erste Dezimalstelle, die Zehntel, erhält; hänge darnach eine Null an den Rest und dividire diesen zehnfachen Rest wieder durch den Nenner, wodurch man die zweite Dezimalstelle, die Hundertel, bekommt; hänge an den neuen Rest abermals eine Null, dividire wieder und setze dieses Verfahren so lange fort, bis entweder die Division aufgeht, oder, wenn es einen unendlichen Dezimalbruch gibt, bis man genug Dezimalstellen hat, in welch' letzterem Falle die Fortsetzung durch mehrere Punkte anzudeuten ist.

Beispiele.

```
a) 4 30/8 = 4,375.   b) 20/3 = 0,666 ....   c) 18 30/11 = 18,2727....
    -60                 - 20                    - 80
     -40                 -20                    --30
      --                  -20                     -80

                 d) 70/12 = 0,58333 ....
                    100
                    --40
                      - 40
                        -40
```

In diesen letzten 3 Beispielen geht die Division nie auf und nehmen daher die Dezimalbrüche als Quotienten nie ein Ende; solche Dezimalbrüche heißen unendliche.

Das Verfahren ergibt sich aus folgender Entwicklung:

Es sei z. B. $\frac{2}{3}$ in einen Dezimalbruch zu verwandeln, so vergrößere man den Bruch mit 10, 100, 1000 oder 10000 2c., je

nachdem man 1, 2, 3, 4 oder mehr Dezimalstellen für den Dezimalbruch haben will, also $\frac{2}{3} = \frac{20}{30} = \frac{200}{300} = \frac{2000}{3000} = \frac{20000}{30000} \ldots$, dividire nun Zähler und Nenner durch den Nenner 3, wodurch der Bruch den Nenner 10, 100, 1000 oder 10000 rc. erhält und somit ein Dezimalbruch wird, nämlich:

$$\frac{2}{3} = \frac{6\ldots}{10} = \frac{66\ldots}{100} = \frac{666\ldots}{1000} = \frac{6666\ldots}{10000} = \ldots\ldots$$

Da bei der Division des Zählers noch der Rest 2 bleibt, welcher vernachlässigt und weggelassen wird, so hat allerdings der Dezimalbruch nicht mehr den vollen Werth des gemeinen Bruches $\frac{2}{3}$; allein der Fehler wird um so geringer, je mehr der gemeine Bruch zuvor vergrößert wurde, und kann hiedurch so gering gemacht werden, als es nothwendig ist. Schreibt man nun den Dezimalbruch abgekürzt, so hat man:

$$\frac{2}{3} = 0,6\ldots\ldots = 0,66\ldots\ldots = 0,666\ldots\ldots = 0,6666\ldots$$

In diesem Dezimalbruche wiederholt sich die Ziffer 6 unendlich oft, weßhalb er ein unendlicher Dezimalbruch heißt.

Uebungs-Aufgaben.

a) Man verwandle nachstehende gemeinen Brüche nach beiden Verfahren in Dezimalbrüche:

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{27}{32}$, $\frac{11}{25}$, $\frac{29}{40}$, $\frac{23}{50}$, $\frac{17}{64}$, $\frac{37}{80}$, $\frac{3}{125}$, $\frac{53}{128}$, $\frac{7}{256}$; $\frac{27}{90}$, $\frac{14}{70}$, $\frac{77}{700}$, $\frac{21}{300}$, $\frac{76}{4000}$, $\frac{185}{5000}$; $\frac{9}{12}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{22}{55}$, $\frac{14}{56}$, $\frac{18}{48}$, $\frac{36}{45}$, $\frac{49}{56}$, $\frac{27}{48}$, $\frac{34}{85}$, $\frac{7}{352}$, $\frac{13}{65}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{153}{170}$, $\frac{24}{40}$.

b) Folgende gemeinen Brüche sollen nach dem allgemeinen Verfahren in Dezimalbrüche verwandelt werden:

$\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{12}{17}$, $\frac{17}{18}$, $\frac{2}{19}$, $\frac{16}{21}$, $\frac{9}{22}$, $\frac{13}{24}$, $\frac{14}{27}$, $\frac{23}{30}$, $\frac{2}{33}$, $\frac{25}{36}$, $\frac{4}{45}$, $\frac{1}{48}$, $\frac{5}{54}$, $\frac{37}{60}$, $\frac{7}{72}$, $\frac{56}{75}$, $\frac{65}{81}$, $\frac{1}{108}$, $\frac{13}{144}$, $\frac{11}{360}$, $\frac{5}{576}$, $\frac{7}{1728}$.

§ 55.

1) Diejenigen Dezimalziffern eines unendlichen Dezimalbruches, welche sich immer in derselben Ordnung wiederholen, heißen die Periode des Dezimalbruches; z. B. von 8,454545 .... ist 45 die Periode.

Kommen zwischen dem Dezimalstriche und der Periode auch noch Dezimalziffern vor, welche sich nicht mehr in derselben Ordnung wiederholen, so nennt man diese im Gegensatze die unperiodischen Dezimalziffern; z. B. von 18,24675675 .... sind 24 die unperiodischen und 675 die periodischen Dezimalziffern.

2) Die Dezimalbrüche werden in endliche und unendliche

oder periodische eingetheilt; die unendlichen Dezimalbrüche zerfallen wieder in reinperiodische und unreinperiodische.

Endlich heißt ein Dezimalbruch, wenn er nicht unendlich viele Dezimalstellen hat, wie 0,48 und 3,57248; unendlich, wenn seine Dezimalstellen bis ins Unendliche fortlaufen; reinperiodisch, wenn er nur periodische Dezimalziffern hat, wie 0,363636... und 5,831831...; unreinperiodisch, wenn er außer den periodischen auch noch unperiodische Dezimalziffern enthält, wie 0,263434... und 6,8759759...

3) Endliche Dezimalbrüche entstehen aus allen gemeinen Brüchen, deren Nenner nur 2 und 5 als einfache Faktoren enthalten; z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{16}$, $\frac{19}{25}$, $\frac{36}{125}$, $\frac{17}{50}$, $\frac{21}{80}$.

Unendliche Dezimalbrüche ergeben sich aus allen gemeinen (möglichst reduzirten) Brüchen, in deren Nennern auch andere einfache Faktoren als 2 und 5 vorkommen, oder von welchen die letzte Ziffer (rechts) des Nenners 1, 3, 7 oder 9 ist; z. B. $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ $\frac{8}{15}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{77}$, $\frac{17}{26}$, $\frac{16}{21}$, $\frac{142}{147}$, $\frac{19}{153}$, $\frac{25}{639}$.

4) Die größtmögliche Anzahl der Stellen, welche die Periode eines Dezimalbruches haben kann, ist um 1 kleiner als der Nenner des gemeinen Bruches, aus welchem der Dezimalbruch enstanden ist;

z. B. bei $\frac{5_0}{7}$ = 0,714285714285...
10
-30
-20
-60
-40
-50

können nicht mehr als 6 verschiedene Reste bleiben, nämlich: 1, 2, 3, 4, 5 und 6, der siebente Rest muß wieder ein schon dagewesener sein, da der Rest immer kleiner ist als der Divisor; daher ist auch der aus dem siebenten Reste durch Anhängung einer Null entstehende Dividend wieder ein schon dagewesener und muß somit von da an im Quotienten, d. i. im Dezimalbruche, nothwendig wieder dieselbe Zifferreihe folgen, wie vorher von demselben Dividenden an.

§ 56.

1) Da man nicht mit allen Dezimalziffern eines unendlichen Dezimalbruches, sondern nur mit einigen der ersten rechnen kann: so kommt selbstverständlich auch nicht der volle Werth des Bruches

in Rechnung und gibt eine Rechnung, in welcher unendliche Dezimalbrüche enthalten sind, auch nicht ein ganz genaues, sondern nur annäherndes Resultat, welches aber um so genauer wird, je mehr Dezimalstellen von den unendlichen Dezimalbrüchen in Rechnung kommen.

2) Um von einem unendlichen Dezimalbruche den Werth so genau als möglich für eine bestimmte Anzahl beibehaltener Dezimalziffern zu haben, pflegt man die letzte der beibehaltenen Dezimalziffern um 1 zu erhöhen, wenn die nächst folgende (die erste der weggelassenen) Dezimalziffer 5 oder größer als 5 ist; sie wird aber nicht erhöht, wenn die nächste Dezimalziffer kleiner als 5 ist; so setzt man z. B. 0,888.... = 0,889 und 0,333.... = 0,333.

Denn erhöht man von 0,888.... die 3. Dezimalziffer, also 0,888.... auf 0,889, so hat man zur 4. Dezimalziffer, d. h. zu $\frac{8}{10000}$, bloß $\frac{2}{10000}$ zu addiren nöthig, um $\frac{10}{10000} = \frac{1}{1000}$, d. h. so viel zu erhalten, daß aus 0,8888.... der Bruch 0,889 entsteht. Erhöht man dagegen die 3. Dezimalziffer nicht um 1, so geht die 4. Dezimalziffer, d. h. $\frac{8}{10000}$, ganz verloren, abgesehen von den übrigen noch weggelassenen Dezimalziffern. Durch die Erhöhung hat man hier um $\frac{2}{10000}$ zuviel und durch Nichterhöhung um $\frac{8}{10000}$ zu wenig. Im ersteren Falle ist also der Fehler 4 mal geringer als im letzteren, daher ersterer vorzuziehen. Warum bei 0,333.... nicht erhöht wird, darüber denke der Schüler selbst nach.

§ 57.

Addition der Dezimalbrüche.

Dezimalbrüche werden addirt, indem man sie zuerst so unter einander schreibt, daß die gleichnamigen Stellen unter einander kommen, also Ganze unter Ganze, Dezimalstrich unter Dezimalstrich, Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. w., hierauf wie bei ganzen Zahlen addirt, im Resultate aber wieder den Dezimalstrich setzt und zwar unter die übrigen Dezimalstriche; z. B.

18,327 + 7,03529 + 0,36 + 24,328104 + 0,9 + 358,4067

$$\begin{array}{r} 18,327 \\ 7,03529 \\ 0,36 \\ 24,382104 \\ 0,9 \\ 358,4067 \\ \hline 409,357094. \end{array}$$

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ist leicht einzusehen. Da die Dezimalbrüche, wie die ganzen Zahlen, sich auf das dekadische Zahlensystem gründen, so müssen sie auch wie die ganzen Zahlen behandelt werden.

Uebungs-Aufgaben.

a) 25,7402 + 6,09 + 0,390478 + 835,213 + 0,15095 + 7,2.
b) 8,326 + 0,253 + 0,00047 + 9,9 + 16,834126 + 18,36.
c) 45,50982 + 6,2384 + 25,082 + 16,07 + 49,398 + 0,6.
d) 0,92 + 27,00087 + 378,5289 + 0,251 + 8,6 + 19,3876248.
e) 5,6728 + 48,00263 + 567,871 + 21,2508592 + 0,063 + 0,000963.
f) 63,281459 + 1,83497 + 8,324 + 0,8 + 0,0041 + 8,132 + 5,04 + 0,3218972.
g) 4,385 + 4724,73 + 9,9304395 + 2,38158 + 0,4587 + 4,6438795 + 0,087948.
h) 92,4857329 + 0,91074 + 28,157298 + 6,3284 + 593,89 + 8,5 + 183,982634.
i) 22,5437 + 932,593818 + 5,23583 + 597,5832 + 9,57 + 75 + 11,317.
k) 3,38428315 + 93,5604 + 0,4874327 + 5,23 + 25,873 + 0,15083 + 54,732.
l) 8,532489 + 1,4572 + 5932,893 + 193,47884 + 9,9832834 + 0,23287 + 0,7.
m) 932,4328 + 16,4903296 + 0,43282 + 94,392 + 8,39 + 17,08998832 + 5,4763.

§ 58.

Subtraction der Dezimalbrüche.

Zwei Dezimalbrüche werden von einander subtrahirt, indem man sie, wie bei der Addition, zuerst so unter einander schreibt, daß die gleichnamigen Stellen unter einander zu stehen kommen, dann gleichnamig macht, hierauf wie bei ganzen Zahlen subtrahirt und im Reste wieder den Dezimalstrich setzt.

Beispiel. 24,1794 — 15,684283

```
 24,179400
 15,684283
-8,495117
```

Uebungs-Aufgaben.

a) 48,3857 — 19,4798.
b) 136,293287 — 43,49328.
c) 25,90325 — 6,459887.
d) 8,500039 — 6,492.
e) 54,3124 — 29,36952.
f) 0,382482 — 0,3783.
g) 0,932 — 0,5834793.
h) 836,2478 — 98,59459.
i) 17,9374 — 9,846745.
k) 75 — 18,3862.
l) 14,396 — 8.
m) 35,4872 — 18,564.
n) 8,57239 — 6,084743
o) 36 — 0,00932.
p) 45 — 44,0832.
q) 0,0093 — 0,0008925.
r) 0,832 — 0,0993.
s) 6 — 0,00057.

§ 59.

Multiplication der Dezimalbrüche.

1) Dezimalbrüche werden miteinander multiplicirt, wenn man sie nach Weglassung der Dezimalstriche wie ganze Zahlen multiplicirt und im erhaltenen Produkte von rechts nach links so viele Stellen zu Dezimalstellen macht, als alle Faktoren zusammen Dezimalstellen haben. Z. B. 3,05 × 7,3 × 0,607 = 13,514855.

```
     305
    × 73
  ------
     915
    2135
  ------
   22265
   × 607
  ------
  155855
 13 3590
 -------
13,514855
```

Denn wenn man die Dezimalbrüche in Form von gemeinen Brüchen schreibt, mit diesen die Multiplication ausführt und das Resultat wieder als abgekürzten Dezimalbruch schreibt, so resultirt dasselbe wie vorher, nämlich:

$$3{,}05 \times 7{,}3 \times 0{,}607 = 3\tfrac{5}{100} \times 7\tfrac{3}{10} \times \tfrac{607}{1000} = \tfrac{305}{100} \times \tfrac{73}{10} \times \tfrac{607}{1000} = \tfrac{13514855}{10000000} = 13{,}514855.$$

2) Hat das Resultat weniger Zifferstellen, als Dezimalstellen gemacht werden sollen, so ergänze man die fehlenden Stellen links durch Nullen. Z. B.

$2{,}8 \times 0{,}0004 \times 0{,}4002 = 0{,}000448224.$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 4 \\ \hline 112 \\ \times\ 4002 \\ \hline 224 \\ 448\text{---} \\ \hline 0{,}000448224 \end{array}$$

3) Ein Dezimalbruch wird mit 10, 100, 1000 oder 10000 ꝛc. am einfachsten multiplicirt, wenn man seinen Dezimalstrich um so viele Stellen weiter rechts setzt, als der Multiplicator Nullen hat und bei etwa nicht ausreichenden Dezimalstellen die fehlenden rechts durch Nullen ergänzt.

Beispiele. $5{,}3657 \times 10 = 53{,}657.$
$5{,}3657 \times 100 = 536{,}57.$
$5{,}3657 \times 1000 = 5365{,}7.$
$5{,}3657 \times 10000 = 53657.$
$5{,}3657 \times 100000 = 536570.$
$5{,}3657 \times 1000000 = 5365700.$

Denn dadurch wird jede Ziffer um so viele Stellen weiter links gerückt, als der Multiplicator Nullen hat und erhält daher dem dekadischen Zahlensysteme gemäß jede Ziffer, somit auch der ganze Dezimalbruch einen so viel mal höheren Werth, als der Multiplicator anzeigt.

§ 60.

Uebungs-Aufgaben.

a) $0{,}2 \times 6{,}3$
b) $4{,}7 \times 0{,}28$
c) $0{,}15 \times 9{,}05$
d) $0{,}27 \times 0{,}003$
e) $4{,}04 \times 0{,}3 \times 5{,}1$
f) $1{,}7 \times 3 \times 0{,}634$
g) $0{,}8 \times 3{,}9 \times 0{,}001$
h) $6{,}2 \times 2 \times 0{,}05 \times 9{,}1$
i) $3{,}04 \times 0{,}1 \times 8 \times 0{,}63$
k) $0{,}003 \times 5{,}3 \times 0{,}4 \times 0{,}05$
l) $15{,}3 \times 0{,}5 \times 0{,}62 \times 4$
m) $0{,}39 \times 0{,}008 \times 10 \times 0{,}02$
n) $0{,}07 \times 6 \times 0{,}0016 \times 0{,}09 \times 0{,}9$
o) $4\,2 \times 0{,}00018 \times 100 \times 0{,}015 \times 0{,}8$
p) $0{,}0421 \times 0{,}001 \times 8 \times 6{,}2 \times 0{,}007$
q) $0{,}503 \times 0{,}3 \times 0{,}005 \times 1000 \times 0{,}00001$

r) 9,02 × 0,0008 × 0,12 × 0,2 × 5 × 0,0001
s) 0,07 × 0,203 × 10000 × 0,06 × 0,005 × 0,4
t) 4,385 × 10
u) 0,5923 × 1000
v) 6,004 × 100
w) 0,0742 × 100000
x) 0,15 × 10000
y) 19,9 × 100
z) 6,08356 × 1000000
aa) 273,32 × 100000
ab) 70,53 × 1000
ac) 0,0003 × 1000000
ad) 0,0000018 × 10000
ae) 0,74328 × 100.

§ 61.

Division der Dezimalbrüche.

1) Ein Dezimalbruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man zuerst die ganzen dividirt, dann im Quotienten den Dezimalstrich setzt, hierauf die Zehntel, Hundertel, Tausendtel ꝛc. wie die Ziffern einer ganzen Zahl dividirt. Nach der letzten Dezimalstelle kann, falls noch ein Rest bleibt, die Division fortgesetzt werden, wenn man an den Rest, sowie an die folgenden Reste je eine Null anhängt.

Beispiele.

```
a) 43,659 : 9 = 4,851.     b) 0,00173 : 6 = 0,000288333...
    -7 6                             -53
     - 45                             -50
       - - 9                           -20
          -                             -20
                                         -2
```

Dividirt man nämlich bei a) die 43 Ganzen durch 9, so erhält man als Quotienten wieder Ganze und zwar 4, als Rest bleiben 7 Ganze, welche 70 Zehntel geben; addirt man diese zu den schon vorhandenen 6 Zehnteln, so hat man 76 Zehntel. Aus der Division von 76 Zehnteln durch 9 ergeben sich als Quotient wieder Zehntel, nämlich 8 Zehntel, vor welchen der Dezimalstrich zu setzen ist, als Rest bleiben 4 Zehntel, welche 40 Hundertel geben; werden nun diese zu den schon vorhandenen 5 Hunderteln addirt und wird die erhaltene Summe 45 Hundertel durch 9 dividirt, so erhält man 5 Hundertel als Quotienten u. s. w.

Jede an den Rest angehängte Null behufs Fortsetzung der Division wie bei b) kommt vom Dividenden, welcher ein Dezimalbruch ist, dem man nach § 53 unbeschadet des Werthes beliebig viele Nullen anhängen oder angehängt denken kann.

2) Ein Dezimalbruch wird durch 10, 100, 1000 oder 10000 ꝛc. am einfachsten dividirt, wenn man seinen Dezimalstrich um so viele Stellen weiter links setzt, als der Divisor Nullen hat, und bei etwa nicht ausreichenden Zifferstellen die fehlenden links durch Nullen ergänzt.

Beispiele.

a) 24,5 : 10 = 2,45
b) 7572,63 : 100 = 75,7263
c) 679,804 : 1000 = 0,679804
d) 26,34 : 1000000 = 0,00002634
e) 0,079 : 100000 = 0,00000079
f) 0,00048 : 10000 = 0,000000048.

Hiedurch wird jede Ziffer um so viele Stellen weiter rechts gerückt, als der Divisor Nullen hat und erhält daher nach dem dekadischen Zahlensysteme jede Ziffer, somit auch der ganze Dezimalbruch einen so viel mal kleineren Werth, als der Divisor anzeigt

3) Ein Dezimalbruch wird durch eine ganze Zahl mit angehängten Nullen bequemer dividirt, wenn man zuerst diese Nullen des Divisors wegschafft, indem man unter Weglassung der Nullen den Dezimalstrich im Dividenden um so viele Stellen weiter links setzt, als der Divisor angehängte Nullen hat und hierauf die Division nach 1) ausführt; z. B.

278,34 : 500 = 2,7834 : 5 = 0,55668.
-28
·33
-34
-40
--

Durch diese Versetzung des Dezimalstriches und Weglassung der Nullen werden sowohl Dividend [2)] als Divisor durch ein und dieselbe Zahl dividirt, nämlich durch 10, 100, 1000 oder 10000 ꝛc., je nach der Anzahl der angehängten Nullen des Divisors. Hiedurch wird aber der Werth des Quotienten nicht geändert, sondern

bloß die Division vereinfacht, ähnlich wie bei einem gemeinen Bruche, welcher auch eine Division ist (§ 39).

4) Ein Dezimalbruch wird durch einen anderen Dezimalbruch dividirt, wenn man zuerst den Divisor in eine ganze Zahl verwandelt und hierauf nach 1) dividirt.

Der Divisor wird in eine ganze Zahl verwandelt, wenn man den Dezimalstrich sowohl im Dividenden als auch im Divisor um so viele Stellen weiter rechts setzt, als der Divisor Dezimalstellen hat und dann von letzterem den Dezimalstrich ganz wegläßt. Z. B.

0,6384 : 0,25 = 63,84 : 25 = 2,5536.
13 8
-1 34
- -90
150
- - -

Durch diese Versetzung des Dezimalstriches werden Dividend und Divisor mit ein und derselben Zahl multiplicirt und zwar mit einer Zahl, welche aus 1 und so vielen angehängten Nullen besteht, als der Divisor Dezimalstellen hat; der Werth des Quotienten ändert sich dadurch nicht (vergl. § 39).

§ 62.

Uebungs-Aufgaben.

1)
a) 564,823 : 4
b) 72,936 : 9
c) 8,346 : 6
d) 0,7943 : 8
e) 0,635 : 7
f) 0,2942 : 11
g) 6,983 : 12
h) 0,2758 : 25
i) 0,02835 : 36
k) 0,009355 : 48
l) 0,0008126 : 96
m) 94,932 : 108
n) 295,36 : 154
o) 0,00001292 : 542
p) 0,000002325 : 85
q) 0,00004389 : 109725.

2)
a) 85,927 : 10
b) 517,038 : 100
c) 893,45 : 1000
d) 3582,39 : 100000
e) 1978,135 : 1000000
f) 13,985 : 10000
g) 5,723 : 100000
h) 0,27 : 1000
i) 0,00572 : 10
k) 0,0000932 : 100000
l) 0,003841 : 1000
m) 0,0932 : 1000000
n) 0,00000813 : 100
o) 0,612 : 1000
p) 23,5 : 100

3) a) 483,42 : 60
b) 978,9 : 900
c) 2756,3 : 12000
d) 49,72 : 800
e) 25472,15 : 110000
f) 24,082 : 750
g) 3844729,16 : 15000000
h) 19,85 : 24000
i) 6,12 : 3600000
k) 28,36 : 480
l) 0,24 : 160000
m) 0,0583 : 72000
n) 0,00054 : 10800
o) 0,000075 : 2250
p) 0,00927 : 40500000
q) 0,144 : 90090000
r) 90,036 : 80001000
s) 6,0835 : 70000

4) a) 0,3745 : 0,24
b) 0,7503 : 0,015
c) 28,437 : 4,2
d) 9,5457 : 0,036
e) 0,094 : 0,00008
f) 0,0014376 : 0,000554
g) 0,9523 : 0,00456
h) 0,02324 : 0,0607
i) 0,0004521 : 0,00316
k) 0,0000654 : 1,62
l) 6,045 : 0,06049
m) 48,32 : 15,8
n) 0,0723 : 0,00928
o) 6,003 : 9,06
p) 0,2103 : 81,4
q) 0,64 : 0,32457
r) 0,004578 : 0,255
s) 0,008004 : 0,255
t) 4,382 : 0,8300401
u) 0,0000091042 : 0,00008102
v) 0,00045018 : 0,03054
w) 43,7 : 0,0000002
x) 0,00426 : 0,0005248
y) 0,000145 : 0,63
z) 0,1506 : 0,18.

§ 63.

Verwandlung von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche.

Bei der Verwandlung eines Dezimalbruches in einen gemeinen Bruch hat man zu unterscheiden, ob er endlich, reinperiodisch oder unreinperiodisch ist.

1) Ein endlicher Dezimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, wenn man ihn vollständig, also mit seinem Nenner schreibt, wie er ausgesprochen wird, und hierauf möglichst vereinfacht; z. B.

$$7{,}8 = 7\tfrac{8}{10} = 7\tfrac{4}{5};\quad 0{,}36 = \tfrac{36}{100} = \tfrac{9}{25}.$$

2) Ein reinperiodischer Dezimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, wenn man zum Zähler des gemeinen Bruches die Periode und zum Nenner so viele Neuner nimmt, als die Periode Zifferstellen hat, und hierauf vereinfacht; z. B.

a) $25{,}666\ldots = 25\tfrac{6}{9} = 25\tfrac{2}{3}$

b) $0{,}297297\ldots = \tfrac{297}{999} = \tfrac{33}{111} = \tfrac{11}{37}$.

Denn subtrahirt man von dem 1000fachen das 1fache z. B. des Bruches 0,297297 ...., also:

$$\begin{array}{rcl} 0{,}297297\ldots \times 1000 &=& 297{,}297_{297}\ldots \\ 0{,}297297\ldots \times 1 &=& 0{,}297297\ldots \\ \hline 0{,}297297\ldots \times 999 &=& 297{,}000000\ldots \end{array}$$

so ist der Rest 297 Ganze (sämmtliche Dezimalstellen heben sich auf) gerade das 999fache von 0,297297.. Nimmt man nun von 297 den 999. Theil, so hat der erhaltene Quotient $\frac{297}{999}$ den einfachen Werth des gegebenen Bruches 0,297297 . . .; daher ist 0,297297.... = $\frac{297}{999}$.

3) Ein unreinperiodischer Dezimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, wenn man als Zähler des gemeinen Bruches eine Differenz schreibt, von welcher der Minuend aus den unperiodischen Dezimalziffern und der Periode, der Subtrahend aus den unperiodischen Dezimalziffern besteht; ferner als Nenner so viele Neuner nimmt, als die Periode Zifferstellen hat, und diesen Neunern so viele Nullen anhängt, als unperiodische Dezimalziffern vorhanden sind, und hierauf reducirt.

Beispiele.

a) $0{,}2431818\ldots = \frac{24318 - 243}{99000} = \frac{24075}{99000} = \frac{2675}{11000} = \frac{535}{2200} = \frac{107}{4}$.

b) $48{,}52777\ldots = 48\frac{527 - 52}{900} = 48\frac{475}{900} = 48\frac{95}{180} = 48\frac{19}{36}$.

Denn subtrahirt man von dem 100000fachen das 1000fache z. B. des Bruches 0,2431818...., also:

$$\begin{array}{rcl} 0{,}2431818\ldots \times 100000 &=& 24318{,}18_{18}\ldots \\ 0{,}2431818\ldots \times 1000 &=& 243{,}1818\ldots \\ \hline 0{,}2431818\ldots \times 99000 &=& 24075{,}0000\ldots \end{array}$$

so erhält man dessen 99000faches, nämlich 24075 Ganze, und hat der 99000. Theil von 24075, d. i. $\frac{24075}{99000}$, den einfachen Werth des gegebenen Bruches 0,2431818....

Wie man aus obiger Subtraction ersieht, heben sich alle Dezimalstellen auf und erhält man deßhalb den gleichen Rest, wenn man statt der unendlichen Dezimalbrüche bloß deren Ganze von einander subtrahirt. Die Ganzen des Minuenden bestehen aber aus nichts Anderem als aus den unperiodischen Dezimalziffern und der Periode, die Ganzen des Subtrahenden gerade aus den un- unperiodischen Dezimalziffern. Hieraus folgt:

$$0{,}2431818\ldots = \frac{24318-243}{99000} = \frac{24075}{99000}.$$

§ 65.

Uebungs-Aufgaben.

Man verwandle nachstehende Dezimalbrüche in gemeine Brüche:

1) 4,5; 16,07; 0,26; 0,16; 0,008; 0,035; 17,024; 11,0048; 0,105; 0,15; 0,675; 9,0032; 5,125; 9,8; 0,0625; 0,00064; 12,48; 6,6; 0,18; 24,3125.

2) 8,555...; 0,666...; 7,999...; 42,3636...; 0,015015...; 7,816816 ...; 12,25742574 ...; 15,333 ...; 0,4545 ...; 0,198198 ...; 39,2727 ...; 0,47524752 ...; 4,444 ...; 20,06030603 ...; 0,594594...; 0,888...; 87,6237623...; 0,1818...; 38,504504...; 0,0909...

3) 0,5444...; 28,51333...; 0,12666...; 0,46868...; 0,278181... 5,9243243...; 34,0207207...; 0,603888...; 26,29124124... 7,5131818 ...; 74,603558558 ...; 0 45935643564 ...; 32,0495495 ...; 0,007272 ...; 2,111666 ...; 1,3999 ...; 0,12626...; 9,504369369...; 0,546363...; 21,6111....

Die 4 Rechnungsarten mit einem Gemische von gemeinen und Dezimalbrüchen.

§ 66.

Jede Rechnung mit einem Gemische von gemeinen und Dezimalbrüchen kann wenigstens auf doppelte Art ausgeführt werden: indem man entweder zuerst die gemeinen Brüche in Dezimalbrüche verwandelt und hierauf mit lauter Dezimalbrüchen rechnet; oder indem man zuerst die Dezimalbrüche in gemeine verwandelt und sodann die Rechnung mit lauter gemeinen Brüchen ausführt. Das erstere Verfahren ist im allgemeinen einfacher und beliebter als das letztere.

Beispiele.

Addition.

$48{,}125 + 8\tfrac{4}{9} + 15{,}888\ldots + 28\tfrac{5}{6} = 101{,}291$
oder $= 101\tfrac{7}{24}$

1. Verfahren.

$$\begin{array}{r} 48{,}125 \\ 8{,}444 \\ 15{,}889 \\ 28{,}833 \\ \hline 101{,}291 \end{array}$$

$\frac{4\,0}{9} = 0{,}444\ldots.$

$\frac{5\,0}{6} = 0{,}8333\ldots$

2. Verfahren. $48{,}125 + 8\frac{4}{9} + 15{,}888 \ldots + 28\frac{5}{6}$

$= 48\frac{1}{8} + 8\frac{4}{9} + 15\frac{8}{9} + 28\frac{5}{6}$ $\qquad 48{,}125 = 48\frac{125}{1000} = 48\frac{1}{8}$

$= 99\frac{9 + 32 + 64 + 60}{72}$ $\qquad 15{,}888 \ldots = 15\frac{8}{9}$

$= 99\frac{165}{72} = 101\frac{21}{72} = 101\frac{7}{24}.$

Subtraction.

$36{,}25183 = 19\frac{13}{54} = 17{,}01109$

$$\begin{array}{r} 36{,}25183 \\ 19{,}24074 \\ \hline 17{,}01109 \end{array} \qquad \frac{13^{0}}{54} = 0{,}2407407 \ldots$$

-220
--400
-220

Multiplication.

Hier gibt es außer den 2 ersten noch ein 3. Verfahren, welchem häufig der Vorzug vor den beiden ersten gebührt. Es besteht darin, daß man weder die gemeinen Brüche in Dezimalbrüche, noch diese in jene verwandelt, sondern zuerst die gemischten gemeinen Brüche zu unechten macht, hierauf vereinfacht, d. h. je einen Zähler und Nenner durch ein gemeinsames Maß dividirt, wobei jeder Dezimalbruch als Zähler gilt, darnach alle Zähler, ebenso alle Nenner mit einander multiplicirt und zuletzt ersteres Produkt durch letzteres dividirt. Z. B.

$$2\tfrac{4}{7} \times 3{,}5 \times 4\tfrac{4}{9} \times 0{,}2 \times \tfrac{2}{3} = \frac{\overset{2}{\cancel{18}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} \times \overset{0,5}{\cancel{3,5}} \times \frac{40}{\underset{1}{\cancel{9}}} \times 0{,}2 \times \tfrac{2}{3}$$

$$= \frac{2 \times 0{,}5 \times 40 \times 0{,}2 \times 2}{3} = \frac{16{,}00}{3} = 5{,}333 \ldots$$

Wie man sieht, ist dieses Verfahren dasselbe, wie bei der Multiplication von lauter gemeinen Brüchen [§ 45, 4)]. Es gewinnt oft dadurch eine bedeutende Einfachheit, daß bei der Vereinfachung die Nenner der gemeinen Brüche theilweise oder auch ganz verschwinden, für letzteren Fall diene folgendes Beispiel:

$$0{,}33 \times 2\tfrac{4}{13} \times 0{,}026 \times \tfrac{5}{11} = \overset{0,03}{\cancel{0,33}} \times \frac{30}{\underset{1}{\cancel{13}}} \times \overset{0,002}{\cancel{0,026}} \times \frac{5}{\underset{1}{\cancel{11}}}$$

$$= 0{,}03 \times 30 \times 0{,}002 \times 5 = 0{,}00900.$$

Division.

Auch bei der Division eines gemeinen und Dezimalbruches kann außer den beiden ersten noch ein drittes Verfahren angewendet werden, nämlich: Man verwandle den gemischten gemeinen

Bruch in einen unechten, mache durch Umstürzen des Divisors aus der Division eine Multiplication und führe diese nach dem 3. Verfahren aus. Hiebei ist zu unterscheiden, ob der gemeine oder der Dezimalbruch den Divisor bildet. Erscheint der Dezimalbruch als Divisor, so schreibe man unter ihn behufs Umstürzung 1 als Nenner.

Beispiele.

1) $4{,}2 : 3\frac{1}{9} = \overset{0,3}{\cancel{4{,}2}} \times \frac{9}{\underset{2}{\cancel{28}}} = \frac{2{,}7}{2} = 1{,}35$

2) $8\frac{2}{11} : 3{,}6 = \frac{\overset{5}{\cancel{90}}}{11} \times \frac{1}{\underset{0,2}{\cancel{3{,}6}}} = \frac{5}{2{,}2} = \frac{50{,}0}{22} = 2{,}2727\ldots$

- 60
160
- - 60

Sehr oft hebt sich bei diesem 3. Verfahren der Nenner des gemeinen Bruches durch Vereinfachung ganz auf; in diesem Falle ist das 3. Verfahren das vortheilhafteste; z. B.

$$11{,}9 : 2\frac{3}{7} = \overset{0,7}{\cancel{11{,}9}} \times \frac{7}{\underset{1}{\cancel{17}}} = 4{,}9.$$

§ 67.

Uebungs-Aufgaben.

Man führe folgende Rechnungen aus und bringe von jedem unendlichen Dezimalbruche in den Additionen und Subtractionen 6 Dezimalstellen in Rechnung:

1) a. $24{,}6527 + 6\frac{5}{8} + 0{,}930823 + 35\frac{11}{12} + 7{,}425.$
b. $9\frac{2}{3} + 0{,}59328 + 16\frac{5}{9} + 8{,}5314 + 38{,}009483.$
c. $457{,}948 + 48\frac{17}{18} + 19\frac{3}{4} + 83{,}21396 + 10{,}328149$
d. $49\frac{2}{3} + 51\frac{4}{7} + 0.450832 + 9\frac{13}{15} + 12{,}41503 + 358{,}32.$
e. $31{,}289103 + 28\frac{15}{16} + 0{,}4135 + 7{,}55142 + \frac{5}{6} + 4\frac{1}{24}.$
f. $5\frac{4}{5} + 21{,}35615 + 16{,}1893 + 5\frac{11}{20} + \frac{1}{48} + 0{,}573728.$
g. $15{,}8897 + 9\frac{2}{21} + 75\frac{7}{20} + 17.583286 + 2\frac{1}{2} + 4{,}987.$
h. $56.356 + 29\frac{3}{4} + 14{,}6732 + 42\frac{17}{25} + 84.130325 + 7\frac{6}{7}.$
i. $11\frac{4}{45} + 0{,}815089 + \frac{7}{8} + 67{,}94382 + 19\frac{2}{5} + 0{,}4721.$
k. $43.819577 + \frac{1}{108} + 20{,}4752 + 5\frac{5}{27} + 0{,}636 + \frac{1}{3}.$
l. $52\frac{1}{4} + 0{,}525738 + 40\frac{8}{11} + 18{,}872 + 9\frac{1}{300} + 0{,}45137.$
m. $28{,}13208 + \frac{5}{1728} + 832{,}510823 + 6\frac{3}{4} + \frac{8}{9} + 20{,}432.$

2) a. $46{,}728325 - 28\frac{7}{9}.$
b. $62{,}043102 - 39\frac{7}{15}.$
c. $18\frac{2}{3} - 216{,}453.$
d. $9{,}320351 - 4\frac{1}{60}.$
e. $34\frac{9}{50} - 23{,}50432.$
f. $0{,}98017 - \frac{19}{40}.$
g. $37{,}812346 - 19\frac{3}{8}.$
h. $23\frac{13}{32} - 16{,}985298.$

i. $14{,}0021 - 10\frac{1}{18}$.
k. $29\frac{31}{48} - 14{,}98763$.
l. $7\frac{5}{144} - 4{,}9785$.
m. $19{,}3215 - 11\frac{3}{56}$.
n. $8\frac{1}{12} - 0{,}98735$.
o. $17\frac{3}{80} - 4{,}39098$.
p. $61{,}28017 - 49\frac{29}{36}$.
q. $15{,}3704 - 14\frac{6}{7}$.

3) a. $6\frac{8}{9} \times 0{,}03 \times 2\frac{8}{31} \times 0{,}0015 \times 0{,}001 \times \frac{2}{7}$.
b. $2\frac{8}{15} \times 0{,}1 \times 7{,}5 \times 3\frac{3}{19} \times 0{,}005$.
c. $4\frac{7}{8} \times 0{,}12 \times 3\frac{2}{7} \times 0{,}022 \times \frac{1}{27}$.
d. $5\frac{1}{7} \times 0{,}02 \times 2{,}1 \times \frac{5}{18} \times 0{,}01 \times 3\frac{3}{4}$.
e. $4\frac{4}{9} \times 0{,}2 \times 2\frac{6}{7} \times 1{,}8 \times \frac{1}{4}$.
f. $2{,}4 \times 4\frac{5}{8} \times 0{,}001 \times 1\frac{3}{7} \times \frac{1}{9}$.
g. $5\frac{7}{9} \times 0{,}003 \times 3\frac{1}{13} \times 2{,}4 \times 0{,}01 \times \frac{5}{8}$.
h. $8{,}1 \times 0{,}003 \times 1\frac{5}{27} \times 5\frac{4}{7} \times 4{,}1 \times \frac{3}{8} \times 0{,}001$.
i. $6\frac{3}{7} \times 3{,}9 \times 2{,}8 \times 3\frac{9}{17} \times 0{,}01\ 2\frac{4}{13}$.
k. $4{,}5 \times 2\frac{4}{13}\ 0{,}01 \times 5\frac{4}{9} \times \frac{10}{21}$.
l. $12\frac{3}{4} \times 0{,}08 \times 5{,}6 \times 5\frac{15}{17} \times 0{,}00001$.
m. $8\frac{5}{9} \times 0{,}001 \times 7{,}2 \times 7\frac{3}{11} \times 0{,}13 \times 2\frac{4}{23}$.

4)

a. $2{,}8 : 2\frac{5}{8}$.	i. $3{,}6 : 5\frac{1}{7}$.	r. $8{,}4 : 2\frac{8}{23}$
b. $1{,}08 : 9\frac{3}{4}$.	k. $5\frac{5}{16} : 3{,}4$.	s. $7\frac{7}{24} : 3{,}5$.
c. $4{,}224 : 6\frac{6}{11}$	l. $1{,}43 : 3\frac{2}{3}$.	t. $6{,}4 : 8\frac{4}{15}$.
d. $0{,}375 : 5\frac{10}{13}$.	m. $16\frac{1}{3} : 4{,}27$.	u. $9{,}72 : 3\frac{21}{29}$.
e. $17{,}4 : 2\frac{5}{12}$.	n. $8\frac{18}{19} : 0{,}068$.	v. $9\frac{31}{33} : 1{,}28$.
f. $8\frac{5}{9} : 8{,}8$	o. $6{,}25 : 4\frac{7}{17}$.	w. $5\frac{35}{41} : 4{,}8$.
g. $5\frac{4}{7} : 8{,}1$.	p. $6\frac{3}{8} : 6{,}9$.	x. $19{,}8 : 8\frac{16}{31}$.
h. $4\frac{1}{6} : 4{,}5$.	q. $1\frac{17}{18} : 5{,}6$.	y. $4\frac{17}{22} : 0{,}035$.

Abgekürzte Multiplication und Division von Dezimalbrüchen.

§ 68.

A. Multiplication.

Häufig werden bei einer Multiplication von zwei Dezimalbrüchen nicht alle, sondern nur einige Dezimalstellen des Produktes verlangt, indem man sich eine unbedeutende Ungenauigkeit des Resultates gerne gefallen läßt; in diesem Falle läßt sich die Multiplication so verkürzt ausführen, daß man nicht mehr als gerade die verlangte Anzahl von Dezimalstellen im Resultate erhält.

Jede Dezimalstelle eines Dezimalbruches bildet mit ihrem Spezialnenner selbst wieder einen besonderen Dezimalbruch, den man Partial-Dezimalbruch nennen kann. Ein Dezimalbruch ist also eine Summe von so vielen Partial-Dezimalbrüchen, als er Dezimalstellen hat. Dies berücksichtigend wird man das verkürzte Multiplicationsverfahren gründlicher verstehen lernen, welches nun in Folgendem besteht:

1) Vom Multiplicanden werden nur so viele Dezimalstellen multiplicirt, daß diese immer mit den Dezimalstellen des betreffenden Partial-Dezimalbruches vom Multiplicator zusammen eben soviele Dezimalstellen ausmachen, als solche vom Hauptprodukte verlangt werden. Wenn z. B. vom Hauptprodukte 4 Dezimalstellen verlangt sind und ein Partial-Dezimalbruch vom Multiplicator 3 Dezimalstellen hat, so darf vom Multiplicanden nur 1 Dezimalstelle genommen und multiplicirt werden.

2) Die hiedurch sich ergebenden Partial-Produkte sind alle gleichnamige Dezimalbrüche von eben so vielen Dezimalstellen, als man für das Hauptprodukt verlangt hat, und kommen daher behufs Addition alle gleichnamigen Stellen unter einander zu stehen.

3) Während der Multiplication kommen die einzelnen Stellen des Multiplicators nicht in der gewöhnlichen, sondern umgekehrten Ordnung, von der Linken gegen die Rechte, nach einander zur Verwendung.

4) Die späteren, nicht mehr in Rechnung kommenden Dezimalstellen des Multiplicanden werden durchstrichen; ebenso pflegt man von den in Rechnung kommenden Stellen des Multiplicanden immer deren jeweilige letzte rechts zu durchstreichen, so oft mit einer Ziffer des Multiplicators multiplicirt wurde, so daß die Stellen des Multiplicanden von rechts nach links sich in dem Maße vermindern, als man im Multiplicator stellenweise von links nach rechts vorrückt.

5) Jede zuletzt durchstrichene Stelle des Multiplicanden muß noch einmal multiplicirt werden bloß deßhalb, damit man von dem dadurch erhaltenen Produkte noch die Zehner bei der nächst höheren Stelle links einzählen kann; die in diesem Produkte enthaltenen Einer werden, wenn sie größer als 4 sind, für einen vollen Zehner gerechnet und gilt z. B. 25 für 30, oder 47 für 50. ꝛc.

6) So viele Stellen der Ganzen noch links von den Einern im Multiplicator sich befinden, um eben so viel mehr Dezimalstellen, als nach 1) treffen, hat man im Multiplicanden zum Multipliciren zu nehmen.

7) Im Hauptprodukte sind zuletzt von rechts nach links so viele Stellen zu Dezimalstellen durch den Dezimalstrich abzuschneiden, als solche ursprünglich verlangt wurden; sind nicht

so viele Stellen vorhanden, so müssen die fehlenden links durch Nullen ergänzt werden.

Zur Vergleichung ist von folgenden Beispielen jeder verkürzten auch noch die unverkürzte Multiplication beigesetzt:

I. Beispiel.

84,0758378 × 2,675, auf 4 Dezimalstellen.

verkürzt	unverkürzt	
84,0758|378	840 758378	
2,675	2675	
168151 7	1681516	756
50445 5	504455	0268
5885 3	58853	08646
420 4	4203	791890
224,9029	224,9028	661150

II. Beispiel.

4,43823 × 0,000364, auf 5 Dezimalstellen.

verkürzt	unverkürzt	
4,4|3823	4 43823	
0,000364	364	
133	133	1 469
26	26	6 2938
2	1	7 75292
0,00161	0,00161	551572

III. Beispiel.

6,518236 × 1362,74, auf 3 Dezimalstellen.

verkürzt	unverkürzt	
6,518236	6518236	
1362,74	136274	
6518236	6518236	
1955471	1955470	8
391094	391094	16
13036	13036	472
4563	4562	7652
260	260	72944
8882,660	8882,660	92664

§ 69.

B. Division.

Eine Division von Dezimalbrüchen wird abgekürzt ausgeführt, wenn man behufs Fortsetzung der Division, statt an den Dividenden

oder an die Reste Nullen anzuhängen, die Stellen des Divisors von rechts gegen links nach und nach vermindert, indem man vor jedem erneuerten Dividiren die jeweilige unterste Stelle des Divisors rechts durchstreicht.

Die jedesmal zuletzt durchstrichene Stelle des Divisors muß noch einmal mit der neuen Stelle des Quotienten multiplicirt werden, damit man von dem dadurch erhaltenen Produkte die Zehner bei der nächst höheren Stelle links einzählen kann.

Das Durchstreichen der Stellen im Divisor beginnt gewöhnlich, nachdem alle vorhandenen Stellen des Dividenden dividirt sind doch kann man auch früher oder später je nach Gutdünken zu kürzen anfangen. Je weniger Dezimalstellen vom Quotienten verlangt werden, desto früher kann man das Kürzen beginnen und umgekehrt.

Daß der Divisor, wenn er ein Dezimalbruch ist, zuerst in eine ganze Zahl verwandelt werden muß, ehe die Division beginnt, versteht sich von selbst.

In nachstehendem Beispiele vergleiche man die verkürzte und unverkürzte Division mit einander:

6,428583 : 0,8647
= 64285,83 : 8647

verkürzt

```
64285,83 : 8647 = 7,43446.
60529
-37568
 34588
 -29803
  25941
   -3862
    3459
    -403
     346
     -57
      52
      -5
```

unverkürzt

```
64285,83 : 8647 = 7,43446 . . . .
60529
-37568
 34588
-29803
 25941
 -3862|0
  3458|8
  ·403|20
   345|88
   -57|320
    51|882
    -5|438
```

§ 70.

Uebungs-Aufgaben.

1) a. $4{,}08345 \times 3{,}459$ g. $12{,}0451089 \times 0{,}008345$
b. $0{,}647207 \times 8{,}263$ h. $183{,}0517294 \times 0{,}04695$
c. $0{,}051298 \times 0{,}7432$ i. $1{,}4528738 \times 348{,}257$
d. $0{,}005727 \times 0{,}83267$ k. $12{,}0834853 \times 1847{,}453$
e. $9{,}475823 \times 0{,}00748$ l. $3{,}92147538 \times 19372{,}813$
f. $8{,}03494715 \times 36{,}456$ m. $0{,}47328103 \times 0{,}000953$

2) a. $5{,}432756 : 0{,}3941$ g. $18{,}30432 : 0{,}651328$
b. $0{,}732815 : 0{,}2653$ h. $24{,}187346 : 0{,}051636$
c. $8{,}3248 : 5{,}732$ i. $0{,}047326 : 0{,}4732$
d. $0{,}08342 : 0{,}05382$ k. $0{,}004398 : 0{,}06345$
e. $0{,}573286 : 0{,}00493$ l. $0{,}0006435 : 0{,}73082$
f. $1{,}732456 : 0{,}74076$ m. $36{,}528 : 27{,}146.$

Von den gebrochenen Brüchen.

§ 71.

1) Unter gebrochenen Brüchen versteht man solche Brüche, deren Zähler oder Nenner oder beide zugleich selbst wieder Brüche sind.

2) Man unterscheidet einfache und zusammengesetzte gebrochene Brüche.

a. Von den einfachen gebrochenen Brüchen sind Zähler und Nenner nur einfache Brüche; z. B.

$$\frac{\frac{3}{4}}{5},\ \frac{8}{\frac{2}{3}},\ \frac{\frac{3}{8}}{\frac{6}{7}};$$

gelesen wird z. B. der letzte gebrochene Bruch: $\frac{3}{8}$ gebrochen oder dividirt durch $\frac{6}{7}$.

b. Von den zusammengesetzten gebrochenen Brüchen sind Zähler und Nenner aus Brüchen zusammengesetzte Ausdrücke; z. B.

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{6};\quad \frac{\frac{2}{9}}{5\frac{2}{5}-\frac{3}{4}};\quad \frac{3\frac{1}{4}-2\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}}{4\frac{1}{2}:3\frac{5}{9}};\quad \frac{\frac{5}{7}}{\frac{5}{4\frac{3}{11}}}.$$

3) Zähler und Nenner, besonders Hauptzähler und Hauptnenner, sind von ihren untergeordneten Zählern und Nennern stets wohl zu unterscheiden; deshalb ist der Hauptbruchstrich, wie überhaupt jeder Bruchstrich, vor den untergeordneten Bruchstrichen durch entsprechend größere Länge auszuzeichnen.

4) Ein gebrochener Bruch wird berechnet, d. h. auf einen

einfachen Bruch reducirt, wenn man sowohl vom Hauptzähler als auch vom Hauptnenner (siehe § 49, § 50 und § 51) zuerst die nächsten, dann die entfernteren Operationen nach und nach, nöthigen Falls in Nebenrechnungen, ausführt und die Resultate der Nebenrechnungen immer wieder in die Hauptrechnung, d. h. in den gebrochenen Bruch einsetzt, bis dieser zuletzt ein einfacher Bruch ist.

Je nachdem es bequemer erscheint, können Bruchform und gewöhnliche Divisionsform mit einander wechseln. Folgende 3 Beispiele mögen zum besseren Verständnisse beitragen:

I. $\frac{\frac{8}{9}}{3\frac{2}{5}} = \frac{8}{9} : 3\frac{2}{5} = \frac{8}{9} \times \frac{5}{17} = \frac{40}{153}.$

II. $\frac{\frac{2\frac{5}{8}}{5\frac{3}{4}}}{\frac{7\frac{2}{9}}{4\frac{1}{3}}} = \frac{2\frac{5}{8} : 5\frac{3}{4}}{7\frac{2}{9} : 4\frac{1}{3}} = \frac{\frac{21}{\cancel{8}_{2}} \times \frac{\cancel{4}^{1}}{23}}{\frac{\cancel{65}^{5}}{\cancel{9}_{3}} \times \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{13}_{1}}} = \frac{\frac{21}{46}}{\frac{5}{3}} = \frac{21}{46} \times \frac{3}{5} = \frac{63}{230}$

III. $\frac{\frac{2\frac{5}{7}}{4\frac{1}{2} - \frac{3}{7}} \times 1\frac{1}{4}}{\frac{7}{9} \times \frac{4}{5} : \frac{\frac{4}{5} + \frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}} = \frac{\frac{2\frac{5}{7}}{4\frac{1}{14}} \times 1\frac{1}{4}}{\frac{28}{45} : \frac{1\frac{7}{15}}{\frac{8}{9}}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{112}{297}} = \frac{5}{\cancel{6}_{2}} \times \frac{\cancel{297}^{99}}{112}$

$= \frac{495}{224} = 2\frac{47}{224}.$

Nebenrechnungen zu III.

$4\frac{1}{2} - \frac{3}{7} = 4\frac{7-6}{14} = 4\frac{1}{14}.$

$\frac{7}{9} \times \frac{4}{5} = \frac{28}{45}.$

$\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{12 + 10}{15} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}.$

$\frac{2\frac{5}{7}}{4\frac{1}{14}} \times 1\frac{1}{14} = \frac{\cancel{19}^{1}}{\cancel{7}_{1}} \times \frac{\cancel{\cancel{14}}^{\cancel{2}^{1}}}{\cancel{57}_{3}}$
$\times \frac{5}{\cancel{4}_{2}} = \frac{5}{6}.$

$\frac{28}{45} : \frac{1\frac{7}{15}}{\frac{8}{9}} = \frac{28}{45} \times \frac{\frac{8}{9}}{1\frac{7}{15}} =$

$\frac{28}{\cancel{45}_{3}} \times \frac{\cancel{8}^{4}}{9} \times \frac{\cancel{15}^{1}}{\cancel{22}_{11}} = \frac{112}{297}.$

§ 72.

Uebungs-Aufgaben.

Man reduzire folgende gebrochenen Brüche:

a) $\frac{5\frac{5}{8}}{4\frac{1}{16}}$; b) $\frac{8\frac{7}{9} - 5\frac{2}{3}}{7\frac{7}{12}}$; c) $\frac{6\frac{3}{8}}{5\frac{3}{4} + 2\frac{1}{12}}$; d) $\frac{26\frac{19}{21} - 18\frac{11}{15}}{11\frac{22}{35}}$

e) $\frac{8\frac{17}{18} - 5}{18\frac{5}{6} - 14\frac{11}{18}}$; f) $\frac{28\frac{4}{15} - 27\frac{17}{45}}{1\frac{23}{36} - \frac{23}{24}}$; g) $\frac{56\frac{17}{36} - 55\frac{37}{48}}{1\frac{7}{144}}$;

h) $\dfrac{49\frac{19}{45} - 45\frac{13}{15}}{31\frac{6}{11} - 29\frac{28}{33}}$; i) $\dfrac{\dfrac{7\frac{1}{5}}{3\frac{21}{25}}}{38 - 37\frac{7}{18}}$; k) $\dfrac{56\frac{20}{49} - 52\frac{4}{49}}{\dfrac{9\frac{7}{11}}{2\frac{5}{22}}}$;

l) $\dfrac{\dfrac{10\frac{8}{9}}{2\frac{11}{12}}}{3\frac{11}{15} \times \frac{4}{7}}$; m) $\dfrac{35\frac{21}{32} - 28\frac{23}{24} + 4\frac{5}{96}}{45 - 28\frac{7}{9} + 16\frac{1}{9}}$; n) $\dfrac{\dfrac{8\frac{5}{9}}{8{,}8} - 0{,}61222\ldots}{\dfrac{9\frac{5}{8}}{4\frac{7}{12}} + 1{,}5}$;

o) $\dfrac{6\frac{7}{8}}{2\frac{1}{12}} : \dfrac{43\frac{13}{24} - 26\frac{13}{18} - 16\frac{11}{12}}{1\frac{2}{3}}$; p) $\dfrac{\dfrac{7\frac{5}{9}}{3\frac{5}{27}} + 5\frac{28}{43}}{25\frac{13}{20} - 16\frac{14}{15} + 2\frac{7}{60}}$;

q) $\dfrac{(46\frac{13}{24} - 45\frac{13}{16}) : \frac{7}{12}}{\dfrac{6\frac{6}{7}}{2\frac{19}{28}} + 3\frac{1}{25}}$; r) $\dfrac{\dfrac{8\frac{10}{11}}{2\frac{4}{33}} \times 3\frac{1}{3} - 7\frac{1}{4}}{\dfrac{5\frac{5}{12} \times 4\frac{6}{11} \times 2\frac{4}{13}}{1\frac{3}{22}} - 47\frac{5}{8}}$;

s) $\dfrac{0{,}88 + \dfrac{9\frac{3}{7}}{2\frac{5}{14}} \times 0{,}03}{(78\frac{7}{15} - 77\frac{19}{20}) \times 1\frac{29}{31} + \frac{0{,}004}{0{,}012} - 1}$;

t) $\dfrac{\dfrac{2{,}8}{2\frac{5}{8}} - \frac{0{,}0087}{0{,}54} - 1{,}0005555\ldots}{(\frac{0{,}00037}{0{,}0048} - 0{,}03708333\ldots) \times 0{,}05}$;

u) $\dfrac{\dfrac{2{,}25}{\dfrac{4\frac{1}{2}}{100} \times 18\frac{3}{4}}}{\left(\dfrac{4{,}224}{6\frac{6}{11}} - 0{,}005333\ldots\right) : 0{,}16}$.

§ 73.

Von den Kettenbrüchen.

1) Ein Kettenbruch ist eine Reihe von einfachen Brüchen, deren jeder (mit Ausnahme des ersten) mit dem Nenner des nächst vorhergehenden Bruches additiv verbunden ist; z. B.

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}}}$$

Die einzelnen einfachen Brüche heißen Glieder des Ketten-Bruches.

2) Man unterscheidet Kettenbrüche, in deren Gliedern die Zähler verschieden sein können, und solche, deren Glieder nur 1 als Zähler haben; letztere nennt man einfache Kettenbrüche, nur von diesen soll im Folgenden die Rede sein.

3) Das Verfahren, einen echten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln, ist folgendes: Man dividire Zähler und Nenner des gegebenen Bruches durch dessen Zähler, so erhält man einen gebrochenen Bruch, von welchem der Zähler genau 1 und der Nenner ein gemischter Bruch ist. Nun dividire man Zähler und Nenner des gemischten Bruches durch dessen Zähler, so entsteht ein neuer gebrochener Bruch, welcher an dem Nenner des 1. Gliedes hängt. Setzt man dieses Verfahren fort, so bildet sich jedesmal ein neues Glied, bis der letzte Bruch 1 als Zähler erhält.

Dieses Verfahren gründet sich auf den bekannten Satz: „Ein Bruch ändert seinen Werth nicht, wenn man Zähler und Nenner durch ein und dieselbe Zahl dividirt.“

Ist der gegebene Bruch ein unechter, so müssen zuerst die Ganzen aus ihm genommen werden.

In folgendem Beispiele ist die allmählige Entwicklung eines Kettenbruches aus einem einfachen Bruche dargestellt:

Es sei $\frac{69}{154}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln.

$$\frac{69}{154} = \frac{1}{2 + \frac{16}{69}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{5}{16}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}}}}$$

In dieser Entwicklung erblickt man dasselbe Prinzip, wie beim Aufsuchen des größten gemeinsamen Divisors; denn hier wie dort wird immer mit jedem Reste in den nächst vorhergehenden Divisor dividirt, bis kein Rest mehr bleibt.

4) Daher läßt sich ein Kettenbruch kürzer herstellen, wenn man den größten gemeinsamen Divisor (nach § 30) zwischen dem Zähler und Nenner des gegebenen Bruches aufsucht und hierauf die erhaltenen Quotienten in derselben Ordnung als Nenner, sowie jedesmal 1 als Zähler der Glieder des Kettenbruches setzt.

Sucht man den größten gemeinsamen Divisor vom Zähler und Nenner des obigen Bruches $\frac{69}{154}$, also:

$$\begin{array}{ccccccccc} \multicolumn{3}{c}{2} & \multicolumn{2}{c}{4} & \multicolumn{2}{c}{3} & \multicolumn{2}{c}{5} \\ 154 & : & 69 & : & 16 & : & 5 & : & 1 \\ -16 & & -5 & & -1 & & 0 & & \end{array}$$

so sind die Quotienten 2, 4, 3 und 5 dieselben Zahlen in derselben Ordnung wie die Nenner des obigen Kettenbruches.

Als zweites Beispiel diene folgendes, in welchem $\frac{215}{743}$ nach dem kürzeren Verfahren in einen Kettenbruch verwandelt ist:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 3 & & 2 & & 5 & & 6 & & 3 & \\ 743 & : & 215 & : & 98 & : & 19 & : & 3 & : & 1. \\ -98 & & -19 & & -3 & & -1 & & 0 & & \end{array}$$

Nun bildet sich aus den Quotienten 3, 2, 5, 6 und 3 der Kettenbruch:

$$\frac{215}{743} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3}}}}}$$

5) Um einen gegebenen Kettenbruch in einen einfachen Bruch zu verwandeln, beginne man mit den letzten 2 Gliedern; diese stellen einen gebrochenen Bruch dar, von welchem der Zähler 1 und der Nenner ein gemischter Bruch ist. Man reducire den gebrochenen Bruch auf einen einfachen und setze letzteren in den Kettenbruch statt der letzten 2 Glieder ein. Der hiedurch ein Glied weniger zählende Kettenbruch wird der gleichen Behandlung wiederholt unterzogen und darnach noch so oft, bis er auf einen einfachen Bruch reducirt ist. Es sei z. B. folgender Kettenbruch unter a gegeben und auf einen einfachen Bruch zu reduciren:

$$\overset{a}{\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{4}}}}} = \overset{b}{\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{4}{21}}}} = \overset{c}{\cfrac{1}{3 + \cfrac{21}{46}}} = \overset{d}{\frac{46}{159}}$$

Vom gegebenen Kettenbruch unter a sind die letzten 2 Glieder:

$$\cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{4}}, \text{ sie geben } \frac{1}{5\frac{1}{4}} = \cfrac{1}{\frac{21}{4}} = \frac{4}{21}.$$

Setzt man $\frac{4}{21}$ in den Kettenbruch unter a statt der letzten 2 Glieder ein, so entsteht der Kettenbruch unter b; von diesem sind die letzten 2 Glieder:

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{4}{21}} = \cfrac{1}{2\frac{4}{21}} = \cfrac{1}{\frac{46}{21}} = \frac{21}{46}.$$

Setzt man $\frac{21}{46}$ in den Kettenbruch unter b statt der beiden letzten Glieder ein, so entsteht der Kettenbruch unter c und aus diesem wird endlich der verlangte einfache Bruch $\frac{46}{159}$ unter d.

6) Die Kettenbrüche haben den Zweck, große, unreducirbare Brüche in kleinere mit nur annähernd gleichem Werthe zu verwandeln; denselben Zweck erfüllen sie auch an später zu behandelnden geometrischen Verhältnissen.

Verwandelt man nämlich einen einfachen Bruch in einen Kettenbruch: so ergeben sich, je nachdem man vom Kettenbruche das 1. Glied nimmt, oder die ersten 2, die ersten 3 oder noch mehr Glieder, unter Weglassung der übrigen Glieder, wieder auf einen einfachen Bruch reducirt, — verschiedene Näherungswerthe und zwar beziehungsweise der erste, zweite, dritte ꝛc.

In folgendem Beispiele sind von dem Bruche $\frac{1855}{8222}$ die ersten 4 Näherungswerthe bestimmt:

$$\frac{1855}{8222} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{6}}}}}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ als I. Näherungswerth}$$

$$\cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}} = \frac{2}{9} \text{ als II. „}$$

$$\cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}} = \frac{7}{31} \text{ als III. „}$$

$$\cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}}} = \frac{37}{164} \text{ als IV. „}$$

7) Je mehr Glieder vom Kettenbruche genommen und auf einen einfachen Bruch, den Näherungswerth, reducirt werden, desto näher kommt des letzteren Werth dem wahren Werthe des gegebenen einfachen Bruches; aber auch desto größer und unbequemer werden Zähler und Nenner des Näherungswerthes.

Verfolgt man durch Schlüsse den Einfluß, welchen die Weglassung des unteren Theiles vom Kettenbruche auf den Werth der aufwärts aufeinander folgenden Nenner und Glieder des oberen Theiles vom Kettenbruche und endlich auf den Werth des ersten oder Hauptgliedes im Zusammenhange ausübt: so ergibt sich, daß die aufeinander folgenden Näherungswerthe abwechselnd größer und kleiner sind als der wahre Werth des gegebenen Bruches, daß nämlich der I. Näherungswerth größer, der II. kleiner, der III. größer, der IV. kleiner 2c. ist; daß ferner die ungeraden Ordnungszahlen stets auf die größeren und die geraden auf die kleineren Näherungswerthe treffen.

8) Kürzer können die Näherungswerthe auf folgende mechanische Weise gefunden werden:

Man schreibe die durch das (kürzere) Verfahren des größten gemeinsamen Divisors gefundenen Quotienten [siehe 4)] der Ordnung nach neben einander, setze dann unter den 1. Quotienten den I. Näherungswerth und noch links vor diesen die Bruchform $\frac{0}{1}$; multiplicire hierauf mit dem 2. Quotienten Zähler und Nenner des I. Näherungswerthes und addire zum Produkte des Zählers den Zähler des vorausgehenden Bruches ($\frac{0}{1}$), ebenso zum Produkte des Nenners den Nenner des vorausgehenden Bruches; hiedurch erhält man den II. Näherungswerth. Auf dieselbe Weise gelangt man zum III. Näherungswerthe und zu allen nachfolgenden, indem man immer Zähler und Nenner eines Näherungswerthes mit dem nächst folgenden Quotienten multiplicirt und zum Produkte des Zählers den Zähler, zum Produkte des Nenners den Nenner des nächst vorhergehenden Näherungswerthes addirt.

In folgendem Beispiele sind die ersten 5 Näherungswerthe von $\frac{371}{872}$ gefunden:

2   2   1   5   1   5   3

872 : 371 : 130 : 111 : 19 : 16 : 3 : 1

130   111   -19   -16   -3   -1   0

Quotienten: 2, 2, 1, 5, 1, 5, 3.

Näherungswerthe: $(\frac{0}{1})$ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{17}{40}$, $\frac{20}{47}$ ....

Der I. Näherungswerth besteht immer aus 1 als Zähler und dem 1. Quotienten als Nenner.

Ausrechnung des II. Näherungswerthes: $\frac{1 \times 2 + 0}{2 \times 2 + 1} = \frac{2}{5}$.

" " III. " $\frac{2 \times 1 + 1}{5 \times 1 + 2} = \frac{3}{7}$.

" " IV. " $\frac{3 \times 5 + 2}{7 \times 5 + 5} = \frac{17}{40}$.

" " V. " $\frac{17 \times 1 + 3}{40 \times 1 + 7} = \frac{20}{47}$.

Es versteht sich von selbst, daß die Rechnung des größten gemeinsamen Divisors (nach § 30) nur soweit ausgeführt zu werden braucht, bis man so viele Quotienten hat, als Näherungswerthe gefunden werden sollen.

Uebungs-Aufgaben.

Man suche von nachstehenden Brüchen die ersten 4 Näherungswerthe:

$\frac{314}{421}$; $\frac{157}{164}$; $\frac{89}{233}$; $\frac{128}{509}$; $\frac{372}{613}$; $\frac{851}{982}$; $\frac{955}{1822}$; $\frac{1295}{3052}$.

III. Abtheilung.

Erster Abschnitt.

Schlußrechnungen (Regeldetri).

§ 74.

1) Bei den Schlußrechnungen stehen die Zahlen-Größen in einer solchen Beziehung zu einander, daß einem beliebigen Vielfachen des einen Dinges auch das gleiche Vielfache, oder der ebensovielte Theil des anderen zugehörigen Dinges zukommt und umgekehrt, wie z. B. bei Waare und Preis, Kapital und Zins; Geschwindigkeit und Zeit zur Zurücklegung einer bestimmten Weglänge, Länge und Breite zu einem bestimmten Flächeninhalte ꝛc.

Ist der Preis eines bestimmten Quantums einer Waare bekannt, so läßt sich von dem Preise dieses Quantums auf den Preis eines größeren oder kleineren Quantums derselben Waare,

sowie von dem gegebenen Quantum auf dasjenige eines höheren oder niedrigeren Preises schließen, daher die Benennung Schluß-Rechnung. Z. B.

Wenn 1 Pfund einer Waare 5 Mark kostet, so müssen 7 Pfd. 7 mal soviel, also 35 Mark kosten. Oder: erhält man für 8 Mark 6 Pfd., so muß man für 32 Mark 24 Pfd., d. h. für 4 mal soviel Mark auch 4 mal soviel Pfd. erhalten.

2) In jeder durch Schlüsse zu lösenden Aufgabe unterscheidet man einen Bedingungs- und Fragesatz. Im Bedingungssatze sind alle Größen bekannt, im Fragesatze ist eine der Größen unbekannt, deren Werth durch Schlüsse gefunden werden soll.

3) Von den in den Schlußrechnungen vorkommenden Größen sind immer je 2 von gleicher Benennung, z. B. Waare und Waare, Preis und Preis, Kapital und Kapital, Zins und Zins &c., wovon immer die eine Größe im Bedingungssatze, die andere gleichnamige im Fragesatze sich befindet.

4) Die Schlußrechnungen werden in einfache und zusammengesetzte eingetheilt. Die einfachen enthalten nur 3 bekannte Größen und eine unbekannte, welch letztere man mit x zu bezeichnen pflegt; diese Größen werden Glieder genannt. In den zusammengesetzten Schlußrechnungen kommen mehr als 3 bekannte Glieder und ein unbekanntes vor.

5) Zur leichteren Uebersicht nnd bequemeren Behandlung einer Aufgabe kann man für den Ansatz, besonders bei zusammengesetzten Schlußrechnungen, zuerst alle Glieder des Bedingungssatzes (Bedingungsglieder) in einer Reihe nebeneinander, die Glieder des Fragesatzes (Frageglieder) darunter schreiben, so daß immer je 2 gleichnamige Glieder unter einander zu stehen kommen, und dann mit den Schlußfolgerungen beginnen.

§ 75.

Einfache Schlußrechnungen.

(Einfache Regeldetri.)

Hier sind 3 verschiedeue Fälle möglich: es kann ein Schluß
a) von der Einheit auf die Mehrheit,
b) von der Mehrheit auf die Einheit und
c) von einer Mehrheit auf eine andere Mehrheit zu machen sein.

a) Von der Einheit auf die Mehrheit zu schließen, sei als Aufgabe gegegeben:

Wenn 1 Pfund Zucker 60 pf. kostet, wie theuer kommen 8 Pfd. davon?

		Pfd.	pf.
Auflösung:	Bedingungsglieder:	1	60
	Frageglieder:	8	x

8 Pfd. sind 8 mal so viel Waare als 1 Pfd., folglich muß auch der Preis dafür 8 mal so hoch sein als für 1 Pfd., also $60 \times 8 = 480$ pf. = 4 M. 80 pf.

b) Von der Mehrheit auf die Einheit zu schließen, sei die Aufgabe gegeben:

Wenn 5 Liter Wein 21 Mark kosten, was kostet 1 Liter dieses Weines?

Auflösung: 1 Liter ist nur der 5. Theil von 5 Liter, folglich kostet es auch nur den 5. Theil von 21 Mark, nämlich $\frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$ M. = 4 M. 20 pf.

c) Um von einer Mehrheit auf eine andere Mehrheit zu schließen, muß man von der einen Mehrheit zuerst auf die Einheit und von dieser auf die andere Mehrheit schließen. Es sei die Aufgabe gegeben:

Wenn 6 Meter Zeug 18 Mark kosten, was kosten 11 Meter von demselben Zeug?

Auflösung: Wenn 6 m 18 ℳ kosten, so kostet 1 m den 6. Theil von 18 M., also $\frac{18}{6} = 3$ M., und wenn 1 m 3 M. kostet, so trifft es auf 11 m 11 mal 3 M., also 33 M.

Einfacher wird die Rechnung, wenn die größere Mehrheit ein Vielfaches von der kleineren gleichnamigen Mehrheit ist; in diesem Falle muß das unbekannte Glied ebenso viel mal größer oder kleiner sein als sein gleichnamiges Bedingungsglied, und bedarf es der beiden vermittelnden Zwischenschlüsse von der einen Mehrheit auf die Einheit und von dieser auf die andere Mehrheit nicht. Man habe z. B. die Aufgabe:

Ein Maurer erhielt für 4 Tage als Arbeitslohn 11 Mark; wieviel Lohn träfe es ihm für 20 Tage?

Auflösung. 20 Tage sind 5 mal so viel Arbeitszeit als 4 Tage, folglich muß auch der Lohn 5 mal so groß, d. h. $11 \times 5 = 55$ Mark sein.

§ 76.

Zusammengesetzte Schlußrechnungen.

(Zusammengesetzte Regeldetri).

Wie bei den einfachen, so hat man auch bei den zusammengesetzten Schlußrechnungen, um von einer Mehrheit auf eine andere Mehrheit zu schließen, vermittelnde Zwischenschlüsse von der einen Mehrheit auf die Einheit und von dieser auf die andere Mehrheit zu machen.

Als Beispiele dienen folgende 2 Aufgaben:

I. Aufgabe.

5 Arbeiter vollenden eine bestimmte Arbeit in 8 Tagen, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten; wie lange bräuchten 6 Arbeiter zur nämlichen Arbeit, wenn sie täglich nur 9 Stunden beschäftigt wären?

	Arb.	Tg.	Std.
Bedingungsglieder:	5	8	10
Frageglieder:	6	x	9

Auflösung. Wenn 5 Arbeiter 8 Tage zu der Arbeit nöthig haben, so würde 1 Arbeiter 5 mal so lang, also 8×5 Tage brauchen, und wenn für 1 Arbeiter 8×5 Tage erforderlich sind, so brauchen 6 Arbeiter bloß den 6. Theil davon, also $\frac{8 \times 5}{6}$ Tage und zwar wenn sie, wie vorausgesetzt ist, täglich 10 Stunden arbeiten. Wären sie aber täglich nur 1 Stunde beschäftigt, so müßten sie dafür 10 mal so lange Zeit, d. h. $\frac{8 \times 5 \times 10}{6}$ Tage aufwenden. Arbeiten sie nun statt 1 Stunde täglich 9 Stunden, so brauchen sie nur den 9. Theil der Zeit, nämlich:

$$\frac{8 \times 5 \times 10}{6 \times 9} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \times 5 \times 10}{\underset{3}{\cancel{6}} \times 9} = \frac{200}{27} = 7\tfrac{11}{27} \text{ Tage.}$$

II. Aufgabe.

7 Maurer können eine $66\frac{2}{3}$ m lange, $4\frac{1}{2}$ m hohe und $1\frac{1}{6}$ m dicke Mauer in $16\frac{2}{3}$ Tagen bei täglich 8stündiger Arbeitszeit errichten; wie viele Maurer sind zur Errichtung einer andern $75\frac{5}{7}$ m langen, $3\frac{3}{4}$ m hohen und 2,1 m dicken Mauer erforderlich, wenn sie unter übrigens gleichen Umständen täglich 10 Stunden arbeiten und in $17\frac{2}{3}$ Tagen fertig werden wollen?

	M.	m l.	m h.	m d.	Tg.	Std.
Bedingungsglieder:	7	$66\frac{2}{3}$	$4\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{6}$	$16\frac{2}{3}$	8
Fragglieder:	x	$75\frac{5}{7}$	$3\frac{3}{4}$	2,1	$17\frac{2}{3}$	10

Auflösung. Wenn zur Errichtung einer Mauer von $66\frac{2}{3}$ m Länge 7 Maurer erforderlich sind, so trifft es auf 1 m Länge den $66\frac{2}{3}$. Theil der 7 Maurer, also $\frac{7}{66\frac{2}{3}}$ Maurer; und wenn zu 1 m Länge $\frac{7}{66\frac{2}{3}}$ Maurer genügen, so sind zu $75\frac{5}{7}$ m Länge $75\frac{5}{7}$ mal so viele Maurer nöthig, folglich $\frac{7}{66\frac{2}{3}} \times 75\frac{5}{7}$ Maurer. Dieß gilt für den Fall, daß die Mauer $4\frac{1}{2}$ m hoch ist; auf eine Höhe von nur 1 m trifft es den $4\frac{1}{2}$. Theil der Maurer, nämlich $\frac{7}{66\frac{2}{3}} \times 75\frac{5}{7} \times \frac{1}{4\frac{1}{2}}$ Maurer, daher auf $3\frac{3}{4}$ m Höhe $3\frac{3}{4}$ mal so viel, d. h. $\frac{7}{66\frac{2}{3}} \times 75\frac{5}{7} \times \frac{1}{4\frac{1}{2}} \times 3\frac{3}{4}$ Maurer. Dies gilt für den Fall, daß die Mauer $1\frac{1}{6}$ m dick ist; für 1 m Dicke macht es den $1\frac{1}{6}$. Theil, also $\frac{7}{66\frac{2}{3}} \times 75\frac{5}{7} \times \frac{1}{4\frac{1}{2}} \times 3\frac{3}{4} \times \frac{1}{1\frac{1}{6}}$ Maurer, folglich für 2,1 m Dicke 2,1 mal so viel, nämlich $\frac{7}{66\frac{2}{3}} \times 75\frac{5}{7} \times \frac{1}{4\frac{1}{2}} \times 3\frac{3}{4} \times \frac{1}{1\frac{1}{6}} \times 2{,}1$ Maurer. Dies gilt nur dann, wenn die Mauer in $16\frac{2}{3}$ Tagen aufgeführt wird; soll sie aber in 1 Tag errichtet werden, so sind $16\frac{2}{3}$ mal so viele Maurer, d. h. $\frac{7}{66\frac{2}{3}} \times 75\frac{5}{7} \times \frac{1}{4\frac{1}{2}} \times 3\frac{3}{4} \times \frac{1}{1\frac{1}{6}} \times 2{,}1 \times 16\frac{2}{3}$ Maurer nöthig; folglich braucht man zur Errichtung in $17\frac{2}{3}$ Tagen nur den $17\frac{2}{3}$. Theil der Maurer, somit $\frac{7}{66\frac{2}{3}} \times 75\frac{5}{7} \times \frac{1}{4\frac{1}{2}} \times 3\frac{3}{4} \times \frac{1}{1\frac{1}{6}} \times 2{,}1 \times 16\frac{2}{3} \times \frac{1}{17\frac{2}{3}}$ Maurer. Dies gilt nur, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten; bei nur 1stündiger Arbeitszeit des Tages müssen es 8 mal so viel, d. h. $\frac{7}{66\frac{2}{3}} \times 75\frac{5}{7} \times \frac{1}{4\frac{1}{2}} \times 3\frac{3}{4} \times \frac{1}{1\frac{1}{6}} \times 2{,}1 \times 16\frac{2}{3} \times \frac{1}{17\frac{2}{3}} \times 8$ Maurer sein; wenn sie aber jeden Tag 10 Stunden beschäftigt sind, dann bedarf man nur den 10. Theil der Maurer, nämlich $\frac{7}{66\frac{2}{3}} \times 75\frac{5}{7} \times \frac{1}{4\frac{1}{2}} \times$

$3\frac{3}{4} \times \frac{1}{1\frac{1}{8}} \times 2{,}1 \times 16\frac{2}{3} \times \frac{1}{17\frac{2}{3}} \times 8 \times \frac{1}{10} = \frac{\cancel{7}}{1} \times$
$\frac{\cancel{3}}{\underset{\underset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{288}}} \times \frac{\cancel{538}}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{2}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{8}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\cancel{10}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{50}}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{53}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{1}}$
$\times \frac{1}{\underset{2}{\cancel{10}}} = 9$ Maurer.

§ 77.

Zinsrechnungen mit einfachen Zinsen.

(Durch Schlüsse).

Bei den Zinsrechnungen sind 4 Elemente zu unterscheiden:

a) das **Kapital**, eine bestimmte Geldsumme, welche gegen eine jährliche Vergütung zur Benützung ausgeliehen wird;

b) der **Zins** als Vergütung für das geliehene Kapital;

c) das **Prozent** (pro centum) als Zins für je 100 des geliehenen Kapitals und für die Zeit eines Jahres;

d) die **Zeit**, auf welche das Kapital ausgeliehen ist.

Jedes dieser 4 Elemente kann unbekannt sein und durch Rechnung gefunden werden, wenn jedesmal die übrigen 3 Elemente bekannt sind.

Darnach ergeben sich 4 verschiedene Fälle der Zinsrechnung, für welche hier je ein Beispiel folgt:

I. **Fall.** Es sei der Zins unbekannt und zu berechnen.

Aufgabe. Welchen Zins trägt ein Kapital von 18 M. 75 pf. in 2 Jahren 8 Monaten, wenn es zu $4\frac{1}{2}$ Prozent (% Prozent-Zeichen) ausgeliehen ist?

Auflösung. Da das Kapital zu $4\frac{1}{2}$ % ausgeliehen ist, d. h. da für je 100 *M.* Kapital und für 1 Jahr $4\frac{1}{2}$ *M.* als Zins bezahlt werden, so trifft es als Zins für je 1 *M.* des Kapitals und für 1 Jahr den 100. Theil von $4\frac{1}{2}$ *M.*, also $\frac{4\frac{1}{2}}{100}$ *M.* Zins und für $18\frac{3}{4}$ *M.* Kapital $18\frac{3}{4}$ mal so viel Zins als für 1 *M.* Kap., nämlich $\frac{4\frac{1}{2}}{100} \times 18\frac{3}{4}$ *M.* Zins. Dies ist nun der Zins des Kapitals für 1 Jahr, und für $2\frac{2}{3}$ Jahre macht es $2\frac{2}{3}$ mal so viel Zins, d. h. $x = \frac{4\frac{1}{2}}{100} \times 18\frac{3}{4} \times 2\frac{2}{3} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{2}} \times \frac{1}{\underset{4}{\cancel{100}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{75}}}{\cancel{4}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{3}} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ *M.* = 2 *M.* 25 pf. Zins.

II. **Fall.** Es sei das Kapital unbekannt und zu berechnen.

Aufgabe. Welches Kapital wirft in 2 Jahren 8 Monaten 2 *M.* 25 pf. Zins ab, wenn es zu $4\frac{1}{2}$ Prozent angelegt ist?

Auflösung. 100 ℳ Kapital geben $4\frac{1}{2}$ ℳ Zins für 1 Jahr, folglich trifft es als Zins auf 1 ℳ Kap. den 100. Theil von $4\frac{1}{2}$ ℳ, also $\frac{4\frac{1}{2}}{100}$ ℳ Zins und zwar für 1 Jahr, mithin für $2\frac{2}{3}$ Jahre $2\frac{2}{3}$ mal so viel, d. h. $\frac{4\frac{1}{2}}{100} \times 2\frac{2}{3}$ ℳ Zins. So oft nun dieser Zins aus 1 ℳ Kap. in den $2\frac{1}{4}$ ℳ Zins des gesuchten Kapitals für dieselbe Zeit von $2\frac{2}{3}$ Jahren enthalten ist, so viele Mark muß das gesuchte Kapital haben; daher $x = 2\frac{1}{4} : \left(\frac{4\frac{1}{2}}{100} \times 2\frac{2}{3}\right) = 2\frac{1}{4} : \left(\frac{9}{2} \times \frac{1}{100} \times \frac{8}{3}\right) = \frac{9}{4} \times \frac{2}{9} \times \frac{100}{1} \times \frac{3}{8} = \frac{75}{4} = 18\frac{3}{4}$ ℳ = 18 ℳ 75 ₰ Kapital.

III. Fall. Es soll das Prozent berechnet werden.

Aufgabe. Zu wie viel Prozent müssen 18 ℳ 75 pf. Kapital angelegt werden, wenn man davon in 2 Jahren 8 Monaten 2 ℳ 25 pf. Zins erhalten will?

Auflösung. $18\frac{3}{4}$ ℳ Kap. geben $2\frac{1}{4}$ ℳ Zins, folglich trägt 1 ℳ Kap. den $18\frac{3}{4}$. Theil von $2\frac{1}{4}$ ℳ, nämlich $\frac{2\frac{1}{4}}{18\frac{3}{4}}$ ℳ Zins und zwar für $2\frac{2}{3}$ Jahre, daher für 1 Jahr den $2\frac{2}{3}$. Theil davon, d. h. $\frac{2\frac{1}{4}}{18\frac{3}{4}} : 2\frac{2}{3}$ ℳ Zins. Wird nun dieser Zins von 1 ℳ Kap. für 1 Jahr 100fach genommen, so erhält man den Zins von 100 ℳ Kap. für 1 Jahr, d. h. das gesuchte Prozent, nämlich: $x = \left(\frac{2\frac{1}{4}}{18\frac{3}{4}} : 2\frac{2}{3}\right) \times 100 = \frac{9}{4} \times \frac{4}{75} \times \frac{3}{8} \times \frac{100}{1} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ Prozent.

IV. Fall. Berechnung der Zeit.

Aufgabe. In welcher Zeit geben 18 ℳ 75 pf. Kapital 2 ℳ 25 pf. Zins zu $4\frac{1}{2}$ %?

Auflösung. Auf 100 ℳ Kap. kommen $4\frac{1}{2}$ ℳ Zins für 1 Jahr, mithin trifft es auf 1 ℳ Kap. den 100. Theil von $4\frac{1}{2}$ ℳ, nämlich $\frac{4\frac{1}{2}}{100}$ ℳ Zins; $18\frac{3}{4}$ ℳ Kap. geben $18\frac{3}{4}$ mal so viel Zins als 1 ℳ Kap., also $\frac{4\frac{1}{2}}{100} \times 18\frac{3}{4}$ ℳ Zins. So oft nun dieser Zins des gegebenen Kapitals für 1 Jahr in den $2\frac{1}{4}$ ℳ Zins ebendesselben Kapitals, aber für mehr als 1 Jahr, enthalten ist, so viele Jahre sind es; daher:

$$x = 2\tfrac{1}{4} : \left(\frac{4\frac{1}{2}}{100} \times 18\tfrac{3}{4}\right) = 2\tfrac{1}{4} : \left(\tfrac{9}{2} \times \tfrac{1}{100} \times \tfrac{75}{4}\right) =$$

$$\tfrac{9}{4} \times \tfrac{2}{9} \times \frac{\overset{4}{100}}{1} \times \tfrac{4}{\underset{3}{75}} = \tfrac{8}{3} = 2\tfrac{2}{3} \text{ Jhr.} = 2 \text{ Jhr. } 8 \text{ Mon.}$$

Anmerkung. Zur Uebung dienen die in § 89 und § 90 zur Auflösung durch Proportionen bestimmten Aufgaben.

Zweiter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

A. Verhältnisse.

§ 78.

1) Zwei mit einander verglichene gleichartige Zahlen bilden ein Verhältniß.

2) Man unterscheidet 2 Arten von Verhältnissen: arithmetische und geometrische.

Fragt es sich, um wie viel die eine Zahl größer oder kleiner ist als die andere, d. h. wie groß ihr Unterschied ist, so heißt das Verhältniß ein arithmetisches; untersucht man aber, wie viel mal die eine Zahl größer oder kleiner ist als die andere, d. h. wird deren Quotient gesucht, so nennt man ein solches Verhältniß ein geometrisches. Die beiden Zahlen eines Verhältnisses heißen Glieder.

3) Als Verhältnißzeichen setzt man zwischen die Glieder eines arithmetischen Verhältnisses das Zeichen „—", z. B. 6—4, zu lesen: 6 verhält sich arithmetisch zu 4; zwischen die eines geometrischen Verhältnisses das Zeichen „:", z. B. 20 : 5, zu lesen: 20 verhält sich geometrisch zu 5.

4) Das 1. Glied nennt man Vorderglied, das 2. Hinterglied.

Ist das Vorderglied größer als das Hinterglied, so heißt das Verhältniß fallend, umgekehrt steigend.

5) Den Unterschied der beiden Glieder eines arithmetischen Verhältnisses nennt man Verhältnißzeiger oder Differenz; der Quotient beider Glieder eines geometrischen Verhältnisses heißt gleichfalls Verhältnißzeiger.

6) Zwei oder mehrere Verhältnisse derselben Art mit gleichen Verhältnißzeigern sind gleich, mit ungleichen Verhältnißzeigern ungleich.

§ 79.

a. Arithmetische Verhältnisse.

1) Den Verhältnißzeiger oder die Differenz findet man, wenn das Hinterglied vom Vordergliede subtrahirt wird; demnach ist von dem Verhältnisse 12—8 der Verhältnißzeiger 4 und von 3—5 ist er — 2.

Hieraus ergibt sich, daß der Verhältnißzeiger eines fallenden Verhältnisses positiv und der eines steigenden negativ ist.

2) Das Vorderglied eines arith. Verhältnisses erhält man durch Addition der Differenz zum Hintergliede; ist z. B. das Hinterglied 11 und die Differenz 3, so wird 14 das Vorderglied und 14—11 das Verhältniß.

Das Hinterglied ergibt sich aus der Subtraction der Differenz vom Vordergliede; hat man z. B. 25 als Vorderglied und 7 als Differenz, so resultirt 18 als Hinterglied und 25—18 als Verhältniß.

Anmerkung. Zu einer positiven Zahl eine negative addiren heißt letztere Zahl von ersterer subtrahiren, z. B. $15 + (-6) = 15 - 6 = 9$; dagegen von einer positiven Zahl eine negative subtrahiren heißt diese Zahl zu jener addiren, z. B. $18 - (-7) = 18 + 7 = 25$. Solche Fälle können oben in 2) vorkommen, wenn nämlich die Differenz negativ ist; das Verhältnißzeichen gilt jedoch nicht als negatives Qualitäts-Zeichen, d. h. das Hinterglied ist wegen des davor stehenden Verhältnißzeichens nicht negativ.

3) Zwei oder mehrere arithmetischen Verhältnisse lassen sich zu einem einzigen vereinigen, wenn man sowohl ihre Vorderglieder, als auch ihre Hinterglieder entweder addirt oder subtrahirt. Es seien z. B. die 3 Verhältnisse 12 — 16, 5 — 7 und 3 — 2 gegeben, so erhält man durch Addition 20 — 25 und durch Subtraction 4 — 7, wie folgt:

a)
$$\begin{array}{r} 12 - 16 \\ 5 - 7 \\ 3 - 2 \\ \hline 20 - 25 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 12 - 16 \\ 5 - 7 \\ \hline 7 - 9 \\ 3 - 2 \\ \hline 4 - 7 \end{array}$$

4) Ein arithmetisches Verhältniß ändert sich nicht, wenn man ein und dieselbe Zahl zu beiden Gliedern addirt oder davon subtrahirt, da hiedurch die Differenz keine Aenderung erleidet; z. B.

a)
$$\begin{array}{r} 18 - 14 \\ 3 \quad\ 3 \\ \hline 21 - 17 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 18 - 14 \\ 3 \quad\ 3 \\ \hline 15 - 11 \end{array}$$

§ 80.

b. Geometrische Verhältnisse.

1) Der Verhältnißzeiger oder Quotient ergibt sich aus der Division des Vordergliedes durch das Hinterglied; demnach ist von dem Verhältnisse 24 : 8 der Quotient $\frac{24}{8}$ oder 3 und von 5 : 20 ist er $\frac{5}{20}$ oder $\frac{1}{4}$.

Hieraus folgt, daß der Quotient eines fallenden Verhältnisses ein unechter Bruch oder größer als 1 und der eines steigenden Verhältnisses ein echter Bruch oder kleiner als 1 ist.

2) Das Vorderglied eines geometrischen Verhältnisses wird gefunden, wenn man das Hinterglied mit dem Verhältnißzeiger multiplicirt. Es sei z. B. 4 das Hinterglied und 9 der Verhältnißzeiger, so ist 36 das Vorderglied und 36 : 4 das Verhältniß.

3) Das Hinterglied findet man, wenn das Vorderglied durch den Verhältnißzeiger dividirt wird. Ist z. B. 42 das Vorderglied und 7 der Quotient, so erhält man 6 als Hinterglied und 42 : 6 als Verhältniß.

4) Ein geometrisches Verhältniß ändert sich nicht, wenn man beide Glieder mit ein und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt, da hiedurch der Verhältnißzeiger nicht geändert wird.

Hat man z. B. das Verhältniß 8 : 12, und werden beide Glieder mit 4 multiplicirt, sowie auch dividirt, so erhält man im 1. Falle 32 : 48, im 2. Falle 2 : 3.

5) Das Dividiren beider Glieder durch ein gemeinsames Maß dient zur Vereinfachnng eines Verhältnisses; z. B. aus 36 : 48 wird das einfachere Verhältniß 3 : 4.

6) Das Multipliciren beider Glieder mit derselben Zahl dient zur Entfernung der Brüche aus einem geometrischen Verhältnisse, somit auch zur Vereinfachung, wenn man beide Glieder mit demjenigen Nenner multiplicirt, welchen man entfernen will; oder wenn man, um 2 Brüche wegzuschaffen, beide Glieder Kürze halber mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner multiplicirt und dann reducirt.

Beispiele.

a) $\frac{5}{7} : 4 = (\frac{5}{7} \times 7) : (4 \times 7) = 5 : 28.$

b) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = (\frac{2}{3} \times 15) : (\frac{4}{5} \times 15) = 10 : 12 = 5 : 6.$

c) $4\frac{3}{8} : 2\frac{1}{12} = \frac{35}{8} : \frac{25}{12} = (\frac{35}{8} \times 24) : (\frac{25}{12} \times 24) = 105 : 50$
$= 21 : 10.$

7) Mechanisch und bequemer läßt sich ein Bruch-Verhältniß vereinfachen, wenn man die gemischten Brüche in unechte verwandelt, dabei jedesmal nur den Zähler des unechten Bruches darunter schreibt und den Nenner zum andern Gliede versetzt, welche Versetzung auf 4) beruht; hierauf nach 5) vereinfacht, indem man von beiden Gliedern je eine Zahl, so oft es möglich ist, durch ein gemeinsames Maß dividirt und die nicht mehr geltenden Zahlen durchstreicht; dann in jedem Gliede die unter einander stehenden, noch geltenden Zahlen miteinander multiplicirt, worauf beide Produkte das Verhältniß in seiner einfachsten Form geben. Z. B.

$$\begin{array}{ccc} 4\frac{3}{8} & : & 2\frac{1}{12} \\ 35 & & 8 \\ 12 & & 25 \\ 3 & & 2 \\ 7 & & 5 \\ \hline 21 & : & 10 \end{array}$$

8) Zwei oder mehrere geometrischen Verhältnisse werden zu einem einzigen vereinigt, wenn man die Vorderglieder und ebenso die Hinterglieder durcheinander multiplicirt oder dividirt.

Sind z. B. die 3 Verhältnisse 3 : 2, 5 : 8 und 6 : 1 gegeben, so erhält man durch Multiplication 90 : 16 und durch Division $\frac{1}{10} : \frac{1}{4}$ als zusammengesetzte Verhältnisse, wie folgt:

a) $\begin{array}{ccc} 3 & : & 2 \\ 5 & : & 8 \\ 6 & : & 1 \\ \hline 90 & : & 16 \end{array}$ b) $\begin{array}{ccc} 3 & : & 2 \\ 5 & : & 8 \\ \hline \frac{3}{5} & : & \frac{1}{4} \end{array}$ ferner $\begin{array}{ccc} \frac{3}{5} & : & \frac{1}{4} \\ 6 & : & 1 \\ \hline \frac{1}{10} & : & \frac{1}{4} \end{array}$

B. Proportionen.

§ 81.

1) Eine Proportion ist die Verbindung zweier gleicher Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen. Es müssen also die beiden Verhältnißzeiger gleich sein [§ 78, 6)], außerdem ist es keine Proportion (1. Probe für die Echtheit einer Proportion).

2) Die Glieder der beiden Verhältnisse heißen auch die Glieder der Proportion. Die 4 Glieder einer Proportion heißen einzeln der Ordnung nach *erstes*, *zweites*, *drittes* und *viertes* Glied. Das 1. und 4. Glied nennt man auch *äußere Glieder*, das 2. und 3. dagegen *innere* oder *mittlere Glieder*. Die Benennungen *Vorder-* und *Hinterglieder* der Verhältnisse gelten auch für die Glieder der Proportion; die Vorderglieder der Proportion, nämlich das 1. und 3. Glied, sowie die Hinterglieder, das 2. und 4. Glied, heißen auch *homologe* (gleichnamige) Glieder.

3) Man unterscheidet 2 Arten von Proportionen: *arithmetische* und *geometrische*. Die arithmetischen Proportionen bestehen aus 2 gleichen arithmetischen Verhältnissen, die geometrischen Proportionen aus 2 gleichen geometrischen Verhältnissen; z. B. $8 - 11 = 7 - 10$ ist eine arithmetische Proportion, zu lesen: 8 verhält sich arithmetisch zu 11 wie 7 zu 10; die Proportion $5 : 15 = 9 : 27$ ist eine geometrische, zu lesen: 5 verhält sich geometrisch zu 15 wie 9 zu 27.

Beim Aussprechen einer Proportion kann man die Bezeichnung „arithmetisch" oder „geometrisch" Kürze halber auch weglassen, wo sie sich von selbst versteht.

4) Zwei oder mehrere Proportionen derselben Art sind *gleich*, wenn sie gleiche Verhältnißzeiger haben, außerdem *ungleich*. Z. B.
$12 - 8 = 15 - 11$ ist gleich mit $36 - 32 = 29 - 25$
$48 : 16 = 12 : 4$ „ „ „ $99 : 33 = 60 : 20$.

5) Eine Proportion heißt *stetig*, wenn die beiden mittleren Glieder gleich sind, außerdem *diskret*; z. B. $9 - 12 = 12 - 15$ und $11 : 22 = 22 : 44$.

6) Die stetigen Proportionen pflegt man abgekürzt zu schreiben und auszusprechen, indem man das eine mittlere Glied sammt dem Gleichheitszeichen wegläßt; z. B. statt $6 - 9 = 9 - 12$ schreibt man $6 - 9 - 12$ und liest: 6 verhält sich (arithmetisch) zu 9 zu 12; ebenso schreibt man statt $5 : 20 = 20 : 80$ kürzer $5 : 20 : 80$ und liest: 5 verhält sich (geometrisch) zu 20 zu 80

7) Das 4. Glied einer diskreten Proportion heißt die 4. *Proportionale*, das mittlere Glied einer abgekürzten stetigen Proportion die *mittlere Proportionale*.

Uebrigens ist jedes Glied einer Proportion die Proportionale

zu den übrigen Gliedern, und sind die beiden genannten Glieder deßhalb besonders erwähnt, weil deren jedes gewöhnlich das unbekannte, mit x bezeichnete Glied bildet, welches zu berechnen ist.

8) Durch passende Versetzung der Glieder einer Proportion läßt sich jedes Glied nach und nach an jede Stelle bringen, ohne daß deswegen die Glieder ihre Proportionalität verlieren; es bilden sich hiedurch 7 neue Proportionen und zwar nach folgenden 4 Normen:

Man vertausche z. B. von der Proportion 4 : 20 = 6 : 30
1) die beiden inneren Glieder, ... 4 : 6 = 20 : 30
2) die äußeren Glieder, ... 30 : 20 = 6 : 4
3) die beiden Verhältnisse, ... 6 : 30 = 4 : 20
4) die beiden Glieder eines jeden Verhältnisses, 20 : 4 = 30 : 6.

Die übrigen 3 Proportionen ergeben sich durch wiederholte Anwendung der 1. Regel auf die nach 2), 3) und 4) gewonnenen Proportionen. Hiernach sind in Folgendem aus jeder ersten Proportion die 7 übrigen gebildet:

6 — 8 = 5 — 7	4 : 20 = 6 : 30
6 — 5 = 8 — 7	4 : 6 = 20 : 30
7 — 8 = 5 — 6	30 : 20 = 6 : 4
5 — 7 = 6 — 8	6 : 30 = 4 : 20
8 — 6 = 7 — 5	20 : 4 = 30 : 6
7 — 5 = 8 — 6	30 : 6 = 20 : 4
5 — 6 = 7 — 8	6 : 4 = 30 : 20
8 — 7 = 6 — 5.	20 : 30 = 4 : 6.

Man prüfe diese Proportionen.

§ 82.

a. Arithmetische Proportionen.

1) Von jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der beiden inneren Glieder der Summe der beiden äußeren Glieder gleich; z. B. von 11 — 15 = 9 — 13 ist demnach 15 + 9 = 11 + 13.

Nach dieser Regel läßt sich erkennen, ob eine vermeintliche arithm. Proportion eine wirkliche ist oder nicht [2. Probe, siehe § 81, 1)].

2) Umgekehrt erhält man aus 2 gleichen Summen

von je 2 Summanden stets eine arithmetische Proportion, wenn man die Summanden der einen Summe als innere und die Summanden der anderen Summe als äußere Glieder nimmt; aus $8 + 7 = 10 + 5$ ergibt sich sonach $10 - 8 = 7 - 5$.

3) Von einer arithmetischen Proportion wird ein äußeres unbekanntes Glied gefunden, wenn man die beiden inneren Glieder addirt und von der Summe das bekannte äußere Glied subtrahirt. Soll z. B. von $5 - 12 = 8 - x$ die mit x bezeichnete 4. Proportionale gefunden werden, so ist $x = (12 + 8) - 5 = 20 - 5 = 15$.

4) Um ein inneres Glied zu finden, subtrahire man von der Summe der beiden äußeren Glieder das bekannte innere Glied; z. B. von $21 - 28 = x - 15$ ist $x = (21 + 15) - 28 = 36 - 28 = 8$.

5) Das Mittelglied einer arithmetischen stetigen Proportion wird gefunden, wenn man die Summe der beiden äußeren Glieder durch 2 dividirt; z. B. von $17 - x - 27$ ist $x = \frac{17 + 27}{2} = \frac{44}{2} = 22$. Denn das doppelte mittlere Glied ist der Summe der äußeren Glieder gleich, folglich das einfache Mittelglied der halben Summe gleich.

Die mittlere Proportionale heißt gewöhnlich das arithmetische Mittel, auch der Mittel- oder Durchschnittswerth der äußeren Glieder.

6) Ebenso kann auch das arithmetische Mittel von mehr als 2 Zahlen gefunden werden, wenn man die Summe aller Zahlen durch deren Anzahl dividirt. Es sei z. B. von den Zahlen 8, 12, 18, 29, 37 das arithmetische Mittel zu suchen, so ist $x = \frac{8 + 12 + 18 + 29 + 37}{5} = \frac{104}{5} = 20\frac{4}{5}$.

7) Zwei oder mehrere arithmetischen Proportionen lassen sich durch Addition oder Subtraction zu einer einzigen verbinden, wenn man die gleichnamigen Glieder addirt oder von einander subtrahirt; die resultirende Proportion heißt dann eine zusammmengesetzte. In Folgendem sind 3 Proportionen sowohl durch Addition, als auch durch Subtraction zu Einer Proportion zusammengesetzt:

durch Addition:

$$\begin{array}{r} 16 - 12 = 28 - 24 \\ 5 - 7 = 8 - 10 \\ 2 - 3 = 5 - 6 \\ \hline 23 - 22 = 41 - 40. \end{array}$$

durch Subtraction:

$$\begin{array}{r} 16 - 12 = 28 - 24 \\ 5 - 7 = 8 - 10 \\ \hline 11 - 5 = 20 - 14 \\ 2 - 3 = 5 - 6 \\ \hline 9 - 2 = 15 - 8. \end{array}$$

8) Eine arithmetische Proportion bleibt noch eine Proportion, wenn man zugleich zu einem inneren und äußeren Gliede oder zu allen Gliedern ein und dieselbe Zahl addirt, oder davon subtrahirt, da die beiden Verhältnißzeiger einander gleich bleiben.

Dieses Verfahren dient besonders auch dazu, um negative Glieder positiv zu machen.

§ 83.

b. Geometrische Proportionen.

1) In jeder geometrischen Proportion ist das Produkt der inneren Glieder dem Produkte der äußeren Glieder gleich: z. B. von $8 : 24 = 5 : 15$ ist $24 \times 5 = 8 \times 15$.

Nach dieser Regel läßt sich erkennen, ob eine vermeintliche geom. Proportion eine wirkliche ist oder nicht [2. Probe, siehe § 81, 1)].

2) Umgekehrt geben 2 gleiche Produkte von je 2 Faktoren stets eine geometrische Proportion, wenn man die Faktoren des einen Produktes als innere Glieder und die des anderen als äußere Glieder nimmt; z. B. aus $9 \times 4 = 2 \times 18$ wird $2 : 4 = 9 : 18$.

3) Von einer geometrischen Proportion wird ein äußeres Glied gefunden, wenn man die beiden inneren Glieder mit einander multiplicirt und das Produkt durch das bekannte äußere Glied dividirt; z. B. von $7 : 35 = 8 : x$ ist, wenn man das unbekannte Glied mit x bezeichnet,

$$x = \frac{35 \times 8}{7} = \frac{280}{7} = 40.$$

4) Ein inneres Glied wird gefunden, wenn man das Produkt der äußeren Glieder durch das bekannte innere Glied dividirt; z. B. von $11 : x = 5 : 16$ ist $x = \frac{11 \times 16}{5} = \frac{176}{5} = 35\frac{1}{5}$.

5) Zwei oder mehrere geometrischen Proportionen können zu einer einzigen zusammengesetzt werden, wenn man die gleichnamigen Glieder durch einander multiplicirt oder dividirt; die resultirende Proportion heißt dann eine zusammengesetzte. Z. B.

a) durch Multiplication:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5 & : & 6 & = & 10 & : & 12 \\ 8 & : & 2 & = & 4 & : & 1 \\ 2 & : & 3 & = & 4 & : & 6 \\ \hline 80 & : & 36 & = & 160 & : & 72 \end{array}$$

b) durch Division:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5 & : & 6 & = & 10 & : & 12 \\ 8 & : & 2 & = & 4 & : & 1 \\ \hline \frac{5}{8} & : & 3 & = & \frac{10}{4} & : & 12 \\ 2 & : & 3 & = & 4 & : & 6 \\ \hline \frac{5}{16} & : & 1 & = & \frac{5}{8} & : & 2. \end{array}$$

6) Eine geom. Proportion bleibt noch eine Proportion, wenn man ein inneres und zugleich ein äußeres Glied oder alle Glieder mit ein und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt. Z. B.

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 9 & : & 27 & = & 8 & : & 24 \\ \times 4 & & .4 & & & & \\ \hline 36 & : & 108 & = & 8 & : & 24 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 9 & : & 27 & = & 8 & : & 24 \\ :4 & & & & :4 & & \\ \hline 2\frac{1}{4} & : & 27 & = & 2 & : & 24 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 9 & : & 27 & = & 8 & : & 24 \\ \times 4 & & .4 & & .4 & & .4 \\ \hline 36 & : & 108 & = & 32 & : & 96 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 9 & : & 27 & = & 8 & : & 24 \\ :4 & & :4 & & :4 & & :4 \\ \hline 2\frac{1}{4} & : & 6\frac{3}{4} & = & 2 & : & 6 \end{array}$$

Man prüfe die resultirenden Proportionen sowohl nach ihren Verhältnißzeigern, als auch nach den Produkten der inneren und äußeren Glieder.

7) Das Dividiren eines inneren und äußeren Gliedes durch ein gemeinsames Maß dient zur Vereinfachung der Proportion. Z. B. aus $48 : 72 = 16 : x$ wird durch Vereinfachung mit 24 $2 : 3 = 16 : x$ und durch weitere Vereinfachung mit 2 $1 : 3 = 8 : x$,

daraus ist $x = \frac{3 \times 8}{1} = 24$.

8) Das Multipliciren eines inneren und äußeren Gliedes mit derselben Zahl dient zur Entfernung der Brüche aus der Proportion, also auch zur Vereinfachung, wenn man beide Glieder mit dem Nenner des einen Bruchgliedes multiplicirt und dieses Verfahren so oft anwendet, als Brüche in der Proportion sind.

Beispiele.

$$8\tfrac{3}{5} : \tfrac{4}{3} = \tfrac{7}{9} : x$$
$$43 : \tfrac{20}{3} = \tfrac{7}{9} : x$$
$$129 : 20 = \tfrac{7}{9} : x$$
$$1161 : 20 = 7 : x$$

$$\text{daraus } x = \frac{20 \times 7}{1161} = \frac{140}{1161}.$$

Hiebei wird immer der wegzuschaffende Bruch mit seinem Nenner multiplicirt, was bei einem echten und unechten Bruche stets den Zähler, bei einem gemischten aber den Zähler seines unechten Bruches gibt, nämlich: $\frac{7}{9} \times 9 = 7$; $\frac{20}{3} \times 3 = 20$; $8\frac{3}{5} \times 5 = \frac{43}{5} \times 5 = 43$.

9) Bei Entfernung der Brüche aus einer Proportion nach 8) ist es gewöhnlich einfacher und vortheilhafter, die Multiplication nur bei demjenigen Bruchgliede wirklich auszuführen, mit dessen Nenner man das innere und äußere Glied multipliciren soll, dagegen beim anderen Gliede dieselbe nur anzudeuten, indem man den genannten Nenner als Multiplicator bloß darunter schreibt, was dann den Anschein hat, als habe man diesen Nenner von einem inneren zu einem äußeren Gliede oder umgekehrt versetzt.

Demnach kann man behufs Entfernung der Brüche aus der Proportion auch mechanisch und bequem auf folgende Art verfahren: Man durchstreiche jeden Nenner und versetze ihn von dem äußeren Gliede, welchem er angehört, zu einem inneren oder von einem inneren zu einem äußeren Gliede. Ist ein Bruch ein gemischter, so verwandle man ihn zuvor in einen unechten, schreibe von diesem nur den Zähler unter den zu durchstreichenden gemischten Bruch und versetze den Nenner.

Hiedurch können in einem Gliede mehrere Zahlen unter einander zu stehen kommen, welche sich zum Theil oder auch ganz wieder aufheben, wenn man nach 7) vereinfacht, d. h. von einem äußeren und inneren Gliede je eine Zahl durch ein gemeinsames Maß dividirt. Die so dividirten und dann nicht mehr geltenden Zahlen hat man zu durchstreichen und ihre Quotienten darunter zu schreiben. Nach der Vereinfachung sind die noch geltenden nicht durchstrichenen Zahlen eines jeden Gliedes mit einander zu multipliciren, woraus eine neue Proportion resultirt, deren unbekanntes Glied x noch schließlich zu berechnen ist.

Folgende 2 Beispiele, in deren zweitem nach Entfernung der Brüche sich auch noch nach 7) vereinfachen läßt, werden das Besagte veranschaulichen: $8\frac{3}{5} : \frac{4}{3} = \frac{7}{9} : x$ und $9\frac{5}{8} : \frac{14}{15} = 2\frac{1}{16} : x$.

I.

$$8\frac{3}{5} : \frac{4}{3} = \frac{7}{9} : x.$$

$$\begin{array}{ll} 43 & 5 \\ 3 & \\ 9 & \\ \hline 1161 : 20 & = 7 : x \end{array}$$

$$x = \frac{20 \times 7}{1161} = \frac{140}{1161}.$$

II.

$$9\frac{5}{8} : \frac{14}{15} = 2\frac{1}{16} : x$$

$$\begin{array}{lll} 77 & 8 & 33 \\ 15 & 2 & 3 \\ 16 & 1 & 1 \\ 11 & & \\ 2 & & \\ 5 & & \\ 1 & & \\ \hline 5 : & 1 = & 1 : x \end{array}$$

$$x = \frac{1 \times 1}{5} = \frac{1}{5}.$$

10) **Von jeder geometrischen Proportion verhält sich die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede; ebenso verhält sich auch die Differenz der Vorderglieder zur Differenz der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.**

Z. B. von $4 : 6 = 8 : 12$ erhält man:

a) $(4 + 8) : (6 + 12) = 4 : 6$
oder: „ „ $= 8 : 12$
daraus: $12 : 18 = 4 : 6$
oder: „ „ $= 8 : 12.$

b) $(8 - 4) : (12 - 6) = 4 : 6$
oder: „ „ $= 8 : 12$
daraus: $4 : 6 = 4 : 6$
oder: „ „ $= 8 : 12.$

11) Die vorige Regel läßt sich auch auf mehr als 2 gleiche Verhältnisse ausdehnen und lautet dann: **Es verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein beliebiges Vorderglied zu seinem Hintergliede.**

Z. B. aus $8 : 2 = 4 : 1 = 12 : 3 = 28 : 7$ ergibt sich:
$(8 + 4 + 12 + 28) : (2 + 1 + 3 + 7) = 8 : 2$
daraus: $52 : 13 = 8 : 2.$

12) Von jeder geometrischen Proportion verhält sich die Summe der Glieder des einen Verhältnisses zur Summe der Glieder des anderen Verhältnisses, wie ein Glied zu seinem homologen Gliede; ebenso verhält sich die Differenz der Glieder des einen Verhältnisses zur Differenz der Glieder des anderen Verhältnisses, wie ein Glied zu seinem homologen Gliede.

Z. B. aus $10 : 5 = 8 : 4$ erhält man:

a)	$(10 + 5)$	:	$(8 + 4)$	=	$10 : 8$
oder:	"		"	=	$5 : 4$
daraus:	15	:	12	=	$10 : 8$
oder:	"		"	=	$5 : 4$.
b)	$(10 - 5)$	:	$(8 - 4)$	=	$10 : 8$
oder:	"		"	=	$5 : 4$
daraus:	5	:	4	=	$10 : 8$
oder:	"		"	=	$5 : 4$.

13) Vergleicht man schließlich die arithmetischen Verhältnisse mit den geometrischen, sowie die arithmetischen Proportionen mit den geometrischen nach den Analogien ihrer Eigenschaften und Regeln: so sieht man, daß bei den geometrischen multiplicirt oder dividirt wird, wo bei den arithmetischen beziehungsweise zu addiren oder zu subtrahiren ist.

§ 84.

Anwendung der arithmetischen Proportionen.

1) Von den arithmetischen Proportionen wird im praktischen Leben wenig Gebrauch gemacht, weil die durch sie zu lösenden Aufgaben meistens einfacher und schneller ohne Proportionsform gemacht werden können.

2) Die arithmetischen Proportionen werden angewendet

a) auf Dinge, die in ihrer Wechselbeziehung um gleich viel zu- oder abnehmen, wie z. B. das Alter zweier Personen, 2 brennende Kerzen von gleicher Beschaffenheit ꝛc.;

b) auf die Bestimmung des arithmetischen Mittels mehrerer gegebenen Werthe.

3) Beim Ansatze einer Aufgabe zu einer arithmetischen Proportion unterscheidet man einen bedingenden und einen fragenden

Satz. Die Zahlen des Bedingungssatzes (Bedingungsglieder) bilden die Vorderglieder und die des Fragesatzes (Frageglieder) die Hinterglieder der Proportion.

Jedes Verhältniß ist aus einem Bedingungs- und Fragegliede von gleicher Benennung zusammen zu setzen.

Ein Glied kann auch aus mehreren zusammengehörigen Zahlen als Einheiten von verschiedenen Ordnungen eines Maß- oder Gewichtssystems bestehen, z. B. aus 3 Jahren 5 Monaten 14 Tagen.

Das unbekannte Glied x pflegt man als 4. Proportionale zu setzen.

Es sei nun folgende Aufgabe zu lösen:

Karl ist 8 Jahre 3 Monate 16 Tage und Heinrich 10 Jhr. 8 Mon. 20 Tg. alt. Wie alt ist Heinrich, wenn Karl ein Alter von 17 Jahren erreicht hat?

Bedingungssatz: Karl ist 8 Jhr. 3 Mon. 16 Tg. und Heinrich gleichzeitig 10 Jhr. 8 Mon. 20 Tg. alt.

Fragesatz: Wie alt ist Heinrich, wenn Karl ein Alter von 17 Jhr. erreicht hat?

Die beiden Alter im Bedingungsatze bilden die Vorderglieder und die im Fragesatze die Hinterglieder der Proportion. Die beiden Alter des Karl bilden das 1. Verhältniß und die des Heinrich das 2. Verhältniß.

Demgemäß entsteht, wenn man das zu suchende Alter des Heinrich mit x bezeichnet und als 4. Proportionale setzt, die Proportion:

8 Jhr. 3 M. 16 Tg. — 17 Jhr. = 10 Jhr. 8 M. 20 Tg. — x,.
woraus x = (17 Jhr. + 10 Jhr. 8 M. 20 Tg.) — 8 Jhr. 3 M. 16 Tg
= 27 Jhr. 8 M. 20 Tg. — 8 Jhr. 3 M. 16 Tg.
= 19 Jhr. 5 M. 4 Tg.

4) Behufs Berechnung des arithmetischen Mittels mehrerer gegebenen Werthe diene folgende Aufgabe als Beispiel:

Ein Weinwirth mischt dreierlei Sorten Wein und Wasser und zwar von der ersten Sorte 12 Liter, das Liter zu 6 Mark 60 pf, von der zweiten Sorte 10 L., à 5 M. 25 pf, von der dritten Sorte 9 L., à 3 M. 40 pf, und vom Wasser 4 L.; welchen Werth oder Preis erhält ein Liter von der ganzen Mischung?

Auflösung. Die ganze Mischung sammt dem Wasser beträgt 35 Liter, folglich trifft es als Preis auf 1 Liter den 35. Theil des Gesammt-Werthes oder Preises der Mischung.

Bezeichnet man den gesuchten Mittelpreis, d. h. den Preis eines Liters dieser Mischung mit x, so ist

$$x = \frac{12 \times 6{,}60 + 10 \times 5{,}25 + 9 \times 3{,}40 + 4 \times 0}{12 + 10 + 9 + 4}$$

$$= \frac{79{,}20 + 52{,}50 + 30{,}60 + 0}{35}$$

$$= \frac{162{,}30}{35} = 4{,}63 \ldots \text{Mark} = 4 \text{ M. } 63 \text{ pf.}$$

§ 85.

Uebungs-Aufgaben.

1) 2 Kerzen von ganz gleicher Beschaffenheit sind bloß in der Länge verschieden, die eine ist 7 cm 8 mm., die andere 11 cm 5 mm lang; beide werden gleichzeitig angezündet. Wie lang ist die längere noch, wenn die kürzere 5 cm 9 mm mißt?

2) Von 2 gleichzeitig angezündeten gleichen Petroleumlampen mit gleichen Dochten und Cylindern enthält die erste 86 gr., die zweite 75 gr. von ein und demselben Oele. Wie viel Oel ist noch in der ersten Lampe, wenn die zweite noch 28 gr. Oel hat?

3) Von 2 neben einander hängenden Thermometern zeigt das eine 18,5 Grad, das andere gleichzeitig 19,3 Grad; wie viel zeigt dieses, wenn jenes 12 Grad angibt?

4) Ein Knabe ist 12 Jahre 8 Monate 16 Tage alt, das Alter seines Vaters beträgt gleichzeitig 47 Jhr. 9 Mon. 11 Tg.; wie alt ist der Vater, wenn der Sohn das 20. Jahr vollendet hat?

5) In Paris zeigt die Uhr 12 Uhr 26 Min., während es in Rom 1 Uhr 5 Min. ist; wie viel Uhr ist es in Rom, wenn man in Paris Morgens 6 Uhr hat?

6) In New-York ist es 12 Uhr Mittags, wenn München ¾ auf 6 Uhr Abends hat; wie viel Uhr ist es in New-York, wenn die Uhr in München ½7 Uhr Morgens zeigt?

7) Welches ist das arithmetische Mittel von 20, 27, 26, 100, 108 und 130?

8) Ein in freier Luft hängendes Thermometer zeigte eines Tages im Schatten Morgens 6 Uhr 12.6, Mittags 1 Uhr 18,7

und Abends 6 Uhr 15,9 Grad; welches war an jenem Tage die mittlere Temperatur?

9) Jemand mischt dreierlei Sorten Wein: von der ersten Sorte kostet das Liter 2 Mark, von der zweiten 1,80 M., von der dritten 1,50 M.; er nimmt von jeder Sorte 1 Liter und gießt noch zur Mischung 1 Liter Wasser. Wie viel ist 1 Liter dieser Mischung werth?

10) Ein Weinwirth mischt zweierlei Sorten Wein und Wasser: von der ersten Sorte nimmt er 20 Liter à 1,20 Mark, von der zweiten 50 L. à 80 pf. und vom Wasser 8 L. Wie theuer muß er das Liter dieser Mischung verkaufen, wenn er seine Gäste nicht benachtheiligen und selbst nichts verlieren will?

11) Ein Silberarbeiter schmelzte 3 silberne Gegenstände zusammen, von welchen der eine 2 Mark 7 Loth wog und aus 13 löthigem Silber*) bestand, der zweite 3 Mark 4 Loth schwer und 12 löthig war, der dritte 1 Mark 15 Loth wog und 15 löthig war. Wievíellöthig wurde die neue Legirung?

12) Ein Goldarbeiter schmelzt zwei goldene Gegenstände zusammen, wovon der eine 1 Mark 6 Karat wiegt und aus 18 karätigem Golde**) besteht, der andere 1 Mark 17 Karat schwer und 14 karätig ist. Wievielkarätig wird die neue Legirung?

13) Auf der Schranne wurde Weizen zu verschiedenen Preisen verkauft und zwar das Hektoliter um 17,20 Mark, 17,85 M., 18 M. und 18,15 M.; wie hoch war der Durchschnittspreis?

14) Auf einem Holzmarkte kaufte man 3 Ster Buchenholz um 42,40 Mark, 42,90 M., 42,95 M., 43 M. und 43,50 M. Welches war der Mittelpreis?

15) Ein Bauer säete während 6 Jahre seine Gerste jedes

---

*) Bei der Legirung (Mischung) von Silber und Kupfer zu Silberwaaren dient dem Silberarbeiter die Kölner Mark zu 16 Loth als Grundgewicht. Die Legirung wird nach dem Silbergehalte in einer Mark bezeichnet, d. h. so viele Loth Feinsilber in einer Mark von der Legirung enthalten sind, soviellöthig heißt die Legirung; so versteht man z. B. unter 13 löthigem Silber eine Legirung von 13 Loth Silber und 3 Loth Kupfer in jeder Mark. Feines (reines) Silber ist demnach 16 löthig und Kupfer 0 löthig.

**) Aehnlich wie bei *) verhält es sich mit der Goldlegirung, nur daß hier die Mark in 24 Karat eingetheilt und der Goldgehalt der Goldwaaren nach Karaten ausgedrückt wird, so daß z. B. 14 karätiges Gold eine Legirung von 14 Karat Gold und 10 Karat Kupfer oder Silber in jeder Mark bezeichnet.

Jahr auf einen anderen Acker und stets das gleiche Quantum. Im 1. Jahre erntete er 15 Hektoliter 20 Liter, im 2. Jahre 16 Hl 15 L., im 3. Jahre 14 Hl. 87 L., im 4. Jahre 20 Hl., im 5. Jahre 21 Hl. 48 L. und im 6. Jahre 12 Hl 97 L. Welches war der Durchschnitts-Ertrag?

16) Nach der in Bayern mit den Wehrpflichtigen des Jahrgangs 1875 vorgenommenen Prüfung hatte Mittelfranken 0,1 Prozent Wehrpflichtige mit mangelhafter Schulbildung, Schwaben und Neuburg 0,7 Proz., Unterfranken und Aschaffenburg 1,3 Proz., Oberfranken 1,5 Proz., Oberbayern 1,5 Proz., die Pfalz 2,6 Proz., Oberpfalz und Regensburg 3,0 Proz. und Niederbayern 3,3 Proz. Welcher durchschnittliche Prozentsatz ergab sich demgemäß für Bayern?

§ 86.

Anwendung der geometrischen Proportionen.

1) Die geometrischen Proportionen können stets auf Dinge angewendet werden, von welchen einem beliebigen Vielfachen des einen Dinges auch das gleiche Vielfache, oder der ebensovielte Theil des anderen zugehörigen Dinges entspricht, wie z. B. auf Waare und Preis, Arbeit und Zeit, Arbeit und Lohn, Kapital und Zins; Anzahl von Menschen und Zeit zur Aufzehrung eines gewissen Lebensmittel-Vorrathes, Geschwindigkeit und Zeit zur Zurücklegung eines gewissen Weges, Länge und Breite zu einem bestimmten Flächeninhalte, Kapital und Prozent oder Kapital und Zeit zu einem gewissen Zinse, Arbeiter und Zeit zu einer bestimmten Arbeit.

2) Der Zweck der Proportionen ist, daß man aus den bekannten Gliedern das unbekannte durch Rechnung findet.

3) Die Proportionen theilt man in einfache und zusammengesetzte ein. Die einfache Proportion oder Regeltedri besteht aus 2 Verhältnissen, also aus 3 bekannten Gliedern und 1 unbekannten. Die zusammengesetzten Proportionen (zusammengesetzte Regeldetri) bestehen aus mehr als 2 Verhältnissen und erhalten je nach der Anzahl der bekannten Glieder die besonderen Namen: regula de quinque, regula de septem, regula de novem ꝛc.

4) Bei jeder Aufgabe unterscheidet man einen bedingenden und fragenden Satz. Die Zahlen des Bedingungssatzes heißen Bedingungsglieder und die des Fragesatzes Fragenglieder.

Die Bedingungsglieder sind alle stets bekannt, von den Fragegliedern ist eines unbekannt und zu brechnen.

Ein Glied kann aus mehreren Zahlen als Einheiten verschiedener Ordnungen von ein und demselben Maß-, Gewichts- oder Münzsysteme bestehen, muß aber auf eine einzige Zahl reducirt werden; z. B. 8 Jahre 5 Monate 18 Tage, oder 6 m 7 dm 9 cm 4 mm, oder 12 *M.* 45 pf.

5) Jedes Verhältniß wird aus einem Bedingungs- und gleichnamigen Fragegliede zusammengesetzt. Das Verhältniß einer Proportion, welches das unbekannte Glied x enthält, heißt Frageverhältniß, jedes andere dagegen Bedingungsverhältniß.

6) Zur besseren Uebersicht und leichteren Behandlung einer Aufgabe schreibt man als Vorbereitung zu dem Ansatze zuerst alle Bedingungsglieder in einer Reihe neben einander und die Frageglieder darunter, so daß immer je 2 gleichnamige Glieder unter einander zu stehen kommen, dann folgt der Ansatz der gegebenen Elemente zu einer Proportion.

Beim Ansatze bildet man aus je 2 unter einander stehenden gleichnamigen Gliedern ein Verhältniß, setzt das Bedingungsverhältniß als erstes Verhältniß, d. i. links, und das Frageverhältniß als zweites, d. i. rechts vom Gleichheitszeichen, letzteres aber so, daß das unbekannnte Glied x die 4. Proportionale wird.

Kommen mehrere Bedingungsverhältnisse vor, so schreibt man unter das erste die übrigen, es bilden dann alle Bedingungs-Verhältnisse zusammen ein zusammengesetztes Verhältniß und ist auch die Proportion eine zusammengesetzte.

Beim Ansetzen eines jeden Bedingungsverhältnisses muß man wohl unterscheiden, ob es steigend oder fallend anzuschreiben ist; dies richtet sich nach dem Frageverhältnisse. Man hat hier bloß zu fragen und zu beurtheilen, ob das Frageverhältniß steigend oder fallend ist, d. h. ob der fragliche, das Hinterglied bildende Werth von x mehr oder weniger betragen soll als das zugehörige Vorderglied. Lautet die Antwort: mehr, so ist das Frageverhältniß steigend und folglich auch das Bedingungsverhältniß; erfolgt aber die Antwort: weniger, so ist das Frage- und somit auch das Bedingungsverhältniß fallend, da beide Verhältnisse einer jeden Proportion zugleich steigend oder zugleich fallend sein müssen.

Zu solchen Untersuchungen kann man die Correlativa: je mehr — desto mehr, je weniger — desto weniger gebrauchen, welche auf Verhältnisse passen, die man gerade Verhältnisse nennt; sowie: je mehr — desto weniger, je weniger — desto mehr, welche sich auf Verhältnisse beziehen, die man umgekehrte nennt.

Folgende 2 Aufgaben mögen als Beispiele für eine einfache und eine zusammengesetzte Proportion oder Regeldetri zur Veranschaulichung des Besagten dienen:

I. Beispiel.

3 Kilogramm 60 Gramm einer Waare kosten 9 *M.* 90 ₰., wie hoch kommen 100 Gramm?

Auflösung.

Der Bedingungssatz ist: 3 Kg 60 g kosten 9 M. 90 pf., der Fragesatz: wie hoch kommen 100 g.?

	Kg	*M.*
Bedingungsglieder:	$3\frac{60}{1000}$	$9\frac{90}{100}$
Frageglieder:	$\frac{100}{1000}$	x

$$3\tfrac{60}{1000} : \tfrac{100}{1000} = 9\tfrac{90}{100} : x$$

Der mit x bezeichnete Preis für das geringere Waarengewicht $\frac{100}{1000}$ Kg muß kleiner sein als der Preis $9\frac{90}{100}$ *M.* für $3\frac{60}{1000}$ Kg Waare; oder kurz: je weniger Waare, desto weniger Preis. Daher ist das Frageverhältniß fallend, mithin auch das Bedingungsverhältniß.

II. Beispiel.

6 Maurer können eine gewisse Mauer von 36 Meter Länge, 4 m Höhe und 1 m Dicke in 12 Tagen errichten, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten. Wie lange werden 5 Maurer unter denselben Verhältnissen zu einer 40 m langen, $3\frac{1}{3}$ m hohen, $\frac{3}{4}$ m dicken Mauer brauchen, wenn sie täglich nur 8 Stunden beschäftigt sind?

Auflösung.

Der 1. Theil dieser Aufgabe bis zum Punkte bildet den Bedingungs- und der übrige Theil den Fragesatz.

	Maurer	m l.	m h.	m d.	Tg.	Std.
Bedingungsglieder:	6	36	4	1	12	10
Frageglieder:	5	40	$3\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	x	8

$$\begin{array}{rcl} 5 & : & 6 = 12 : x \\ 36 & : & 40 \\ 4 & : & 3\tfrac{1}{3} \\ 1 & : & \tfrac{3}{4} \\ 8 & : & 10 \end{array}$$

Hinsichtlich der Zahl der Maurer sind deren zur fraglichen zweiten Mauer weniger als zur ersten gegeben, folglich brauchen die wenigeren Maurer mehr als 12 Tage und sind x Tage mehr als 12 Tage, daher ist das Frageverhältniß 12 : x steigend, mithin auch das Bedingungsverhältniß steigend, nämlich 5 : 6.

In Betreff der Länge soll die fragliche Mauer länger als die andere werden, daher erfordert sie auch mehr als 12 Tage, demnach ist x größer als 12 und 12 : x steigend, also auch das Längenverhältniß steigend, d. i. 36 : 40.

Bezüglich der Höhe soll die fragliche Mauer weniger hoch werden, sonach verlangt sie weniger als 12 Tage, also ist 12 : x fallend und ebenso das Höhenverhältniß, d. i. 4 : $3\frac{1}{3}$.

Was die Dicke anlangt, so soll diese bei der neuen Mauer geringer werden, deshalb reichen weniger als 12 Tage aus und ist 12 : x fallend, also auch das Verhältniß der Dicke fallend, nämlich 1 : $\frac{3}{4}$

In Ansehung der täglichen Arbeitsstunden betragen diese für die fragliche Mauer weniger als für die andere, daher sind mehr als 12 Tage nöthig und ist 12 : x steigend, mithin auch das Stundenverhältniß steigend, nämlich 8 : 10.

Anmerkung. Um sich bei diesen Untersuchungen kürzer zu fassen, sagt man z. B. beim Verhältnisse der Maurer bloß: Je weniger Maurer genommen werden, desto mehr Tage sind erforderlich, folglich ist das Verhältniß steigend anzusetzen. Beim Längen-Verhältnisse der Mauer: Je länger die Mauer werden soll, desto mehr Tage braucht man, daher ist das Verhältniß steigend anzuschreiben. Hiebei ist das Je immer auf das Frageglied (das untere Glied) des zu untersuchenden Verhältnisses und das Desto auf das unbekannte Glied x zu beziehen.

Zeigt es sich bei der Untersuchung eines Verhältnisses, daß für x mehr herauskommen soll als das über dem x stehende Bedingungsglied beträgt, so ist das Verhältniß immer steigend anzuschreiben; soll aber weniger herauskommen, so muß man es stets fallend ansetzen.

7) Was die Ausrechnung einer zusammengesetzten Proportion betrifft, so ist dasselbe zu beobachten, wie bei einer einfachen Proportion, indem man zuerst alle Brüche entfernt und zu diesem Behufe ihre Nenner von einem inneren zu einem äußeren Gliede und umgekehrt versetzt, dann reducirt, d. h. je eine Zahl von einem inneren und äußeren Gliede durch einen gemeinsamen Divisor dividirt und die dividirten Zahlen als nicht mehr geltend durchstreicht, hierauf von jedem Gliede die unter einander stehenden, noch

geltenden Zahlen mit einander multiplicirt, die aus den sich hiedurch ergebenden Produkten resultirende Proportion anschreibt und daraus x berechnet [siehe § 83, 9)].

Als Beispiel soll obige zusammengesetzte Proportion (eine regula de undecim) hier ausgerechnet werden:

$$\begin{array}{rcl} 5 & : & 6 = 12 : x \\ 36 & : & 40 \quad 1 \\ 4 & : & 3\frac{1}{3} \\ 1 & : & \frac{3}{4} \\ 8 & : & 10 \\ 3 & & 10 \\ 4 & & 10 \\ 3 & & 2 \\ 2 & & 2 \\ 4 & & 5 \\ 2 & & 5 \\ \hline 2 & : & 25 = 1 : x \end{array}$$

$$x = \frac{25 \times 1}{2} = 12\tfrac{1}{2} \text{ Tag.}$$

§ 87.

Uebungs-Aufgaben der einfachen Proportion.

1) Wenn 18 Liter Wein 24,75 Mark kosten, wie hoch kommen 3 Hl. 20 l. von demselben Weine?

2) 3 Hl 6 Dl 4 l Weizen kosten 60,80 M., wie viel erhält man um 24,40 M.?

3) Was kosten 8 Kg. 8 Hg. 5 Dg. einer Waare, wenn 5 Kg. 75,25 M. kosten?

4) 2 Pfund Mehl kosten 62 pf., wie viel erhält man um 20 Mark?

5) Wie theuer kommen 9 Ballen 7 Ries 4 Buch 5 Heft Schreibpapier, wenn 7 Hft. 5 Bg. von derselben Sorte 1,20 M. kosten?

6) 3 Buch 7 Heft 8 Bogen Papier kosten 4,05 M., wie viel bekommt man um 36,90 M.?

7) Von einem Wiesengrunde wurden 15 Ar 75 □m um 400 M. verkauft, wie viel ist die ganze Wiese von 3 Ha 9 Da 6 a werth?

8) Für ein Ackerfeld von 3 Ha 6 a zahlt Jemand 6930 M., wie viel trifft es auf 100 M.?

9) 4 Dm 8 m Zeug kosten 72,36 M., wie theuer kommen 6 m 4 dm?

10) Ein Meter ist 3,43 bayer. Fuß gleich, wie viele bayer. Fuß geben 1 Km 6 m?

11) 2 □ m 2 □ dm 50 □ cm Metallblech kosten 4,20 M., was kosten 1 □Dm 25 □m?

12) Von einem Stück Tuch kommt auf eine Länge von 5 m 3 cm ein Flächenraum von 4 □m 8 □cm, welche Länge hat das ganze Stück, dessen Flächenraum 20 □m 80 □dm beträgt?

13) Beim Graben eines Kanals wurden für jedes Kubikmeter ausgehobener Erde 60 pf. bezahlt, wie viel mußte für $1c^{Dm}$ $82c^{m}$ $436c^{dm}$ bezahlt werden?

14) $76c^{cm}$ Quecksilber wiegen 1 Kg 3 cg 3 mg, welches Gewicht hat $1c^{dm}$, d h. 1 Liter Quecksilber?

15) 3 Ster Buchenholz kosten 48,60 M., wie hoch kommen 46,4 Ster?

16) 8 Ster Holz kosten 120,60 M., wie viele Ster bekommt man um 34,80 M.?

17) Wenn 20 Schuhmacher in 1 Tage 16 Paar Stiefel verfertigen, wie viele Paar können 35 Schuhmacher zu Stande bringen?

18) 48 Maurer können eine Mauer in 14 Tagen errichten, wie viele Maurer sind nöthig, wenn die Mauer schon in 8 Tagen fertig werden soll.

19) Auf einem Schiffe reicht der Vorrath an Lebensmitteln auf 45 Tage für 18 Mann aus, wie lange könnten mit demselben Vorrathe 16 Mann bei gleichen täglichen Portionen ernährt werden?

20) Jemand kaufte ein Stück Leinwand, welches 2 Dm 4 m lang und 96 cm breit war, und ließ sich daraus Hemden machen. Als sie fertig waren, wünschte er gerade noch einmal so viel; er bekam aber vom Kaufmanne nicht mehr Leinwand von derselben Breite, sondern nur in der Breite von 90 cm; wie viel mußte er von der Länge nehmen?

21) Die Geschwindigkeit des Lichtes, d. h. der in 1 Sekunde zurückgelegte Weg eines Lichtstrahles, beträgt 42000 Meilen; in welcher Zeit macht ein Sonnenstrahl den 20 Millionen Meilen langen Weg von der Sonne zur Erde?

22) Der beste Leiter der Elektricität ist ein Kupferdraht, auf welchem der elektrische Strom in 1 Sekunde einen Weg von 62000 Meilen zurücklegt. In welcher Zeit würde ein elektrischer Strom auf einem Kupferdrahte die Erdbahn von 120 Millionen Meilen durchlaufen?

23) Ein Lichtstrahl vom nächsten Fixsterne braucht wenigstens 3 Jahre, bis er zur Erde kommt. Wie groß ist dessen Entfernung von der Erde? [Siehe oben 21)].

24) Die Erde legt auf ihrer Bahn um die Sonne in 1. Sek. durchschnittlich $4\frac{1}{6}$ Meilen zurück, welchen Weg macht sie in einer Stunde?

25) Der Mond durchläuft auf seiner Bahn um die Erde in 1 Minute $8\frac{1}{5}$ Meilen; welche Geschwindigkeit hat er, d. h. welchen Weg macht er in 1 Sekunde?

§ 88.

Uebungs-Aufgaben der zusammengesetzten Proportionen.

1) Eine Arbeit wurde von 36 Personen, welche täglich 10 Stunden beschäftigt waren, in 4 Wochen 1 Tage vollendet. Wie viele Stunden des Tages müßten 40 Personen arbeiten, wenn sie dieselbe Arbeit schon in 2 Wochen 3 Tagen bezwingen wollten?

2) 20 Maurer konnten eine 24 m lange, 1 m 5 cm dicke, 3 m 9 dm hohe Mauer in $3\frac{1}{3}$ Tagen errichten, wobei sie täglich 9 Stunden arbeiteten. Wie lang dürfte eine Mauer werden, wenn die Höhe 5 m 2 dm, die Dicke 1 m 7 dm betragen würde, und wenn sie von 16 Maurern in $4\frac{1}{4}$ Tagen bei täglich 10stündiger Arbeitszeit unter übrigens gleichen Verhältnissen fertig werden sollte?

3) Ein Kanal von 3 m 5 dm Tiefe, 6 m 3 dm Breite und 120 m Länge wurde von 30 Arbeitern in $4\frac{2}{3}$ Tagen bei 8 Stunden täglicher Arbeitszeit gegraben. Wie viele Arbeiter wären erforderlich, um einen 8 dm tieferen, 9 dm breiteren, 15 m kürzeren Kanal in $5\frac{1}{3}$ Tagen bei täglich 12stündiger Arbeitszeit unter sonst gleichen Umständen zu Stande zu bringen?

4) Ein Erdwall, welcher 6 m 3 dm hoch, unten 12 m und oben 9 m breit, 200 m lang ist, wurde von 50 Arbeitern in 15 Tagen bei 9 Stunden Arbeitszeit des Tages, wobei sie die Erde 20 Schritte weit herholten, aufgeworfen. In wie vielen Tagen können 60 Arbeiter einen ähnlichen 5 m 4 dm hohen, unten 11 m

und oben 8 m breiten, 560 m langen Erdwall errichten, wenn sie täglich 11 Stunden arbeiten, die Erde 25 Schritte weit herbeischaffen müssen und wenn wegen gewisser Hindernisse die Schwierigkeit in der Herbeischaffung der Erde beim ersten Walle zu der beim zweiten sich wie 4 zu 5 verhält?

5) Eine Festung, welcher eine Belagerung bevorsteht, ist für 2000 Mann auf 3 Monate verproviantirt, so daß es einem Mann eine tägliche Portion von 2 *U.* 100 g trifft. Nun vermehrt sich aber die Mannschaft noch um 200 Mann und es soll jetzt der Proviant auf 2 Monate 20 Tage ausreichen. Wie groß darf die tägliche Portion sein?

6) Der Heuvorrath eines Oekonomen für seinen Viehstand von 21 Stück reicht noch auf 7 Wochen und 2 Tage, wenn er jedem Stück täglich 2 *U.* davon gibt. Wie lange kann er noch von diesem Heu füttern, wenn er 4 Stück verkauft und jedem Stück täglich nur 1 *U.* 200 g verabfolgt.

7) 9 Personen brauchten zum Schneiden des Weizens auf einem 220 m langen, oben 95 m und unten 108 m breiten Acker 1 Woche 5 Tage bei täglich 12stündiger Arbeitszeit. Zu einem Roggen-Acker werden 15 Schnitter genommen, welche den Roggen in 2 Wochen 2 Tagen bei 9 Stunden täglicher Arbeitszeit schneiden sollen; wie lang darf der Acker sein, wenn seine Breite oben 105 m und unten 114 m beträgt und wenn hier mit mehr Schwierigkeiten zu kämpfen ist als beim Weizenacker und zwar im Verhältnisse von 5 : 6?

8) Zum Abmähen einer rechteckigen, 180 m langen, 150 m breiten Wiese waren 27 Personen nöthig, wenn sie in 4 Tagen fertig werden wollten und jeden Tag 5 Morgenstunden mähten. Wie viele Stunden des Tages müssen bei einer ähnlichen 20 m längeren, 30 m schmäleren Wiese 32 Personen mähen, wenn sie 1 Tag weniger brauchen sollen?

9) Ein Holzstoß ist 3 m 85 cm hoch, 24 m 3 dm lang, hat eine Scheitlänge von 1 m 8 cm und kostet 990 M. Wie hoch muß ein anderer Stoß von derselben Holzart sein, wenn er 22 m 5 dm lang ist, eine Scheitlänge von 1 m 5 cm hat und 1000 M. kostet?

10) 12 Weber machen in 8 Wochen 3 Tagen, wenn sie

täglich 10 Stunden weben, 93 Stück Zeug, jedes zu 8 dm 5 cm in der Breite und 34 m in der Länge. Wie viele Stück von demselben Zeug verfertigen 15 Weber in 7 Wochen 6 Tagen, wenn sie täglich 2 Stunden länger arbeiten, jedes Stück 30 m lang und 9 dm 3 cm breit ist?

11) Ein Kühlschiff, welches 4 m 2 dm lang, 3 m 8 dm breit und 3 dm 9 cm hoch ist, hält um 1000 Mark Bier. Wie breit muß ein 3 m 5 dm langes, 3 dm 8 cm hohes Kühlschiff sein, wenn es um 500 Mark Bier fassen soll?

12) 8 Fabrikarbeiter verdienen sich in 6 Wochen, die Woche zu 6 Tagen und den Tag zu 11 Stunden gerechnet, zusammen 578,16 M. Auf welche Summe berechnet sich der Gesammtlohn von 12 Fabrikarbeitern für 8 Wochen, wenn sie jede Woche um 1 Tag und jeden Tag um 1 Stunde weniger arbeiten?

Dritter Abschnitt.

Zinsrechnungen (siehe § 77).

§ 89.

a. Einfache Regeldetri. Uebungs-Aufgaben.

1) Wie viel Zins trägt ein Kapital von 450 M., wenn es zu 4 Prozent (Prozentzeichen: %) ausgeliehen ist, d. h. wenn je 100 M. des Kapitals für 1 Jahr 4 M. Zins tragen?

2) Welchen Zins erhält man von 1217,75 M. Kapital zu 5 Procent?

3) Welchen Zins geben 23,04 M. Kapital zu 6%?

4) Wie viel Zins werfen 12,80 M. Kapital zu 4½% ab?

5) Wie viel Zins gibt ein Kapital von 21,24 M., wenn 340,20 M. Kapital 17,10 M. Zins tragen?

6) Welchen Zins tragen 12870 M. Kapital, wenn 720,90 M. Kapital 35,10 M. Zins abwerfen?

7) Welches Kapital trägt, wenn es zu 4½% angelegt ist, 14,40 M. Zins?

8) Welches Kapital, zu 3¾% angelegt, entspricht dem Zinse 60,15 M.?

9) Von welchem Kapitale erhält man 126,42 M. Zins, wenn es zu $5\frac{1}{4}$% ausgeliehen ist?

10) Welches Kapital gibt 19,38 M. Zins zu $4\frac{3}{4}$%?

11) 495,66 M. Kapital geben 29,92 M. Zins, von welchem Kapital erhält man 32,48 M. Zins?

12) Ein Kapital von 79,20 M. trägt in 5 Jahren 4 Monaten einen gewissen Zins, welches Kapital gibt in 3 Jahren 8 Monaten denselben Zins?

13) Zu wie viel Procent muß man 48,60 M. Kapital ausleihen, damit es 2,52 M. Zins abwirft?

14) Zu wie viel Procent rentirt sich ein Wald, welcher um 2574 M. gekauft wurde und jährl. 132 M. an Erträgnissen liefert?

15) Der Kaufschilling eines Hauses beträgt 14400 M. und der jährliche Miethzins nach Abzug der Steuern und Reparaturkosten 864 M.; zu wie viel Procent rentirt sich das Haus?

16) Für ein Pachtgut im Werthe von 25200 M. werden jährlich 1008 M. Pachtzins bezahlt; zu wie viel Procent ist das Gut verpachtet?

17) Zu wie viel Procent sind 328,50 M. Kapital anzulegen, damit sie denselben Zins in gleicher Zeit liefern wie 730 M. Kapital zu $4\frac{1}{2}$%?

18) Zu wie viel Procent sind 28,80 M. Kapital auszuleihen, wenn sich der Zins auf 2,40 M. belaufen soll?

19) In welcher Zeit trägt ein Kapital 108,36 M. Zins, wenn es in 3 Jahren 9 Monaten 135,45 M. Zins abwirft?

20) Ein Kapital gibt in 5 Jahren 10 Monaten 285,60 M. Zins, in welcher Zeit erhält man von ihm 24,48 M. Zins?

21) In welcher Zeit erhält man von 8250 M. Kapital denselben Zins wie von 3960 M. Kapital in 4 Jahren 2 Monaten zu gleichen Procenten?

22) In welcher Zeit geben 15,12 M. Kapital ebenso viel Zins wie 50,40 M. Kapital in 3 Jahren 5 Monaten zu denselben Procenten?

23) In welcher Zeit macht der Zins eines Kapitals, zu $4\frac{1}{2}$% angelegt, ebenso viel aus wie zu $5\frac{2}{5}$% in 4 Jahren 3 Monaten?

24) In welcher Zeit trägt ein Kapital zu $3\frac{1}{2}$% ebenso viel Zins wie zu $6\frac{1}{4}$ Proc. in 2 Jahren 4 Monaten?

§ 90.

b. Zusammengesetzte Regeldetri. Uebungs-Aufgaben.

1) Wie viel Zins erhält man von 7820 M. Kapital in 2 Jahren 6 Monaten zu $4\frac{1}{2}$ Proc.?

2) Wie viel Zins geben 4800 M. Kapital zu $4\frac{3}{4}$ Proc. in 5 Jahren 1 Monat?

3) Welchen Zins werfen 36,90 M. Kapital zu $3\frac{1}{3}$ Proc. in 6 Jahren 8 Monaten ab?

4) Ein Hausbesitzer vermiethet sein Haus, im Werthe von 16000 M., zu $5\frac{1}{4}$ Proc.; wie viel Miethzins bezieht er in 2 Jahren 9 Monaten?

5) Ein um 12000 M. gekaufter Wald rentirt sich zu $4\frac{4}{5}$ Proc., wie viel machen dessen Erträgnisse in 7 Jahren 11 Monaten aus?

6) Wie viel Zins erhält man von 69,10 M. Kapital in 3 Jahren 3 Monaten, wenn 17,30 M. Kapital in 1 Jahre 1 Monate 1,73 M. Zins geben?

7) Welches Kapital trägt zu $4\frac{1}{2}$ Proc. in 6 Jahren 8 Monaten 59,34 M. Zins?

8) Von welchem Kapitale erhält man zu $5\frac{1}{5}$ Proc. in 2 Jahren 2 Monaten 16,90 M. Zins?

9) Die Erträgnisse eines Grundstückes belaufen sich in 7 Jahren auf 595 M. und berechnen sich zu $4\frac{1}{4}$ Proc.; welchen Kapitalwerth repräsentirt dieses Grundstück?

10) Ein Beamter nimmt in 3 Jahren 7 Monaten 4300 M. Gehalt ein; welcher Kapitalsumme entspricht seine Arbeitskraft, wenn man $4\frac{1}{2}$ Proc. zu Grunde legt?

11) Jemand lebt von den Zinsen seines auf $5\frac{1}{2}$ Proc. angelegten Kapitals und darf demgemäß in 2 Jahren 1 Monate 3630 M. verbrauchen; wie groß ist sein Kapital?

12) Jemand hat 2 Kapitalien zu gleichen Procenten ausgeliehen: das eine beträgt 6400 M., wofür er in 8 Jahren 3 Monaten 2400 M. Zinsen einnimmt; wie groß ist das andere, welches in 5 Jahren 4 Monaten genau halb so viel Zinsen einbringt, als das erstere?

13) Zu wie viel Procent sind 12000 M. Kapital anzulegen, damit sie in 2 Jahren 5 Monaten 1450 M. Zins tragen?

14) 1500 M. Kapital geben in 8 Jahren 4 Monaten 600 Mark Zinsen, zu wie viel Procent ist das Kapital ausgeliehen?

15) 8000 M. Kapital werfen in 4 Jahren 2 Monaten 1600 M. Zinsen ab, zu wie viel Procent ist das Kapital angelegt?

16) Ein Pachthof, im Werthe von 25000 M., ist um 7500 M. auf 6 Jahre in Pacht gegeben, zu wie viel Procent rentirt er sich?

17) Ein Wald wurde um 9000 M. angekauft, seine Erträgnisse summirten sich während 9 Jahre 4 Monate auf 3360 M.; zu wie viel Prozent rentirt sich der Wald?

18) Ein Kapital erträgt in 4 Jahren 8 Monaten 800 M. Zins zu $3\frac{3}{4}$ Proc.; zu wie viel Procent muß es angelegt werden, damit es in 2 Jahren 6 Monaten 600 M. Zins einbringt?

19) In wie vielen Jahren trägt ein Kapital von 6300 M. zu $4\frac{1}{2}$ Proc. 567 M. Zins?

20) In welcher Zeit geben 22,40 M. Kapital zu $3\frac{3}{4}$ Proc. 5,60 M. Zins?

21) 88,80 M. Kapital sind zu 5 Proc. ausgeliehen, in welcher Zeit beläuft sich der Zins bis auf $\frac{1}{4}$ des Kapitals?

22) Ein Haus, um 8700 M. gekauft, rentirt sich durch den Miethzins zu $6\frac{1}{4}$ Proc.; in welcher Zeit erreicht der Miethzins den halben Kaufschilling?

23) Von einem Kapital belaufen sich die Zinsen zu $3\frac{3}{5}$ Proc. in 5 Jahren 3 Monaten auf 3500 M.; in welcher Zeit erreichen sie zu $4\frac{1}{2}$ Proc. die Summe von 1800 M.?

24) In wie vielen Jahren geben 2500 M. Kapital zu $5\frac{1}{3}$ Proc. dieselben Zinsen wie 4000 M. Kapital zu $4\frac{2}{3}$ Proc. in 7 Jahren 6 Monaten?

1. Einfache Reduktionen von Einheiten eines Maß-, Gewichts- oder Münzsystems auf die eines anderen Systems.

§ 91.

1) Solche Reduktionen geschehen immer mittels zweier Verhältnißzahlen, welche das Verhältniß zwischen den betreffenden Maßeinheiten der beiden Systeme angeben. Die Verhältnißzahlen können in zwei verschiedenen Formen gegeben sein: entweder in der Form einer Gleichung, z. B. 12 Mark sind gleich 7 Gulden oder so viel wie 7 Gulden, kürzer: 12 *M.* = 7 fl.; oder durch ihre Beziehung auf je 1 Maßeinheit der beiden betreffenden Systeme

in der Form einer Proportion, z. B. 1 Mark verhält sich zu 1 Gulden wie 7 zu 12, kürzer: 1 M. : 1 fl. = 7 : 12.

Die Gleichungsform bildet den Bedingungssatz. Die Proportionsform muß zuerst in die Gleichungsform verwandelt werden und zwar nach der bekannten Hauptregel der geometrischen Proportionen, nämlich: Das Produkt der mittleren Glieder ist gleich dem der äußeren Glieder. Auf solche Weise erhält man aus obiger Proportionsform der Mark und Gulden die Gleichungsform: 7 fl. = 12 M. Folgende Aufgabe diene als Beispiel:

Wie viele Zollpfund geben 45 alte bayr. Handelspfund, da das alte bayer. Handelspfund sich zum Zollpfund verhält wie 28 zu 25?

Aus 1 H.-U. : 1 Z.-U. = 28 : 25
erhält man: 25 H.-U. = 28 Z.-U.

daher:	H.-U.	Z.-U.
Bedingungsglieder:	25	28
Frageglieder:	45	x

$$\not{25} : \not{45} = 28 : x$$
$$5 \quad 9$$
$$5 : 9 = 28 : x$$
$$x = \frac{9 \times 28}{5} = \frac{252}{5} = 50\tfrac{2}{5} \text{ Zollpfund.}$$

2) Ist die eine der beiden Verhältnißzahlen die Einheit (1), so läßt sich die Reduktion einfacher durch bloße Multiplication oder Division mit der anderen Verhältnißzahl ausführen. Z. B. Wie viele bayr. Fuß erhält man aus 70 Meter, da 1 m so viel ist wie 3,43 bayr. Fuß.

Auflösung. 70 m = 70 × 3,43 = 240,1 bayr. Fuß.

3) Die beiden zu einer Maß-Reduktion erforderlichen Verhältnißzahlen kann sich der Schüler selbst bilden, wenn er die beiden betreffenden Maße, Gewichte oder Münzen nach ihrem Werthe kennt und sie durch ein und dasselbe dritte Maß, Gewicht oder Münzstück auszudrücken weiß. Wenn ihm z. B. bekannt ist, daß das alte bayer. Handelspfund 560 Gramm und das Zollpfund 500 Gramm hat, so kann er daraus obige Proportion unter 1) ableiten, nämlich: 1 H.-U. : 1 Z.-U. = 560 : 500
oder vereinfacht: „ „ = 28 : 25.

Wenn ferner der Schüler weiß, daß 1 Mark 35 Kreuzer und 1 Franke 28 Kreuzer werth ist, so erhält er daraus die Proportion: 1 M. : 1 Fr. = 35 : 28 und hieraus: 28 M. = 35 Fr.

§ 92.

Uebungs-Aufgaben.

1) Wie viele Meter erhält man aus 36 bayr. Klaftern, da 100 bayr. Klafter so viel sind wie 175 m? ferner wie viele Meter aus 28, 60, 96, 100 oder 108 Klaftern?

2) Wie viele bayr. Klafter geben 42, 56, 70, 91 oder 105 m?

3) Wie viele bayr. Fuß sind 60, 78, 95,115 oder 200 m? 1 m verhält sich zu 1 bayr. Fuß wie 34,3 zu 10.

4) Wie viele Meter sind 49, 147, 196, 245 oder 490 bayr. Fuß?

5) Wie viele bayer. Ellen geben 45, 65, 80, 95 oder 105 m? 5 m sind ebenso viel wie 6 bayer. Ellen.

6) Wie viele Meter geben 66, 72, 84, 108 oder 516 bayer Ellen?

7) Wie viele bayr. Klafter machen 360, 480, 1800, 450 oder 1600 bayer. Ellen? Die bayer. Klafter verhält sich zur bayer. Elle wie 120 zu 57,1.

8) Wie viele bayr. Ellen machen 571, 1142, 1713, 2284 oder 2855 bayr. Klafter?

9) Wie viele Kilometer kommen auf 30, 45, 80, 100 oder 170 Poststunden? 1 Km verhält sich zu 1 Poststunde wie 10 zu 37.

10) Wie viele Poststunden kommen auf 74, 111, 148, 185 oder 259 Kilometer?

11) Wie viele □m gehen auf 240, 300, 1000, 2000 oder 125 □Fuß bayerisch? 100 b. □Fuß sind 8,52 □m gleich.

12) Wie viele bayr. □Fuß gehen auf 1704, 2556 oder 4260 □m?

13) Wie viele Hektar betragen 586, 1172 oder 1465 bayr. Tagwerk? 10 Hektar sind gleich 29,3 bayr. Tagwerk.

14) Wie viele bayer. Tagwerk betragen 80, 120 oder 200 Hektar?

15) Wie viele bayer. □Ruthen kommen 60, 80 oder 130 Ar gleich? 1 Ar verhält sich zu 1 □Ruthe wie 117,4 zu 10.

16) Wie vielen Ar kommen 2348, 3522 oder 5870 □Ruthen gleich?

17) Wie viele Kubikmeter ergeben sich aus 8044, 12066 oder 20110 bayr. Kubikfuß? 1^{cm} verhält sich zu 1 Kubikfuß wie 402,2 zu 10.

18) Wie viele Kubikfuß ergeben sich aus 400, 900 oder 1000 Kubikmeter?

19) Wie viele Kubik-Centimeter sind in 35, 49 oder 63 Kubikzoll enthalten? 100^{ccm} sind gleich 7 Kubikzoll.

20) Wie viele Kubikzoll sind in 80, 75 oder 2000 Kubikcentimeter enthalten?

21) Wie viele bayr. Maß erhält man aus 2138, 3207 oder 5345 Liter? Die b. Maß verhält sich zum Liter wie 1069 zu 1000.

22) Wie viele Liter erhält man von 8000, 10000 oder 40000 bayr. Maß?

23) Wie viele Württemberger Maß geben 900, 2500 oder 6000 bayr. Maß? 582 württembergische Maß machen so viel aus wie 1000 bayr. Maß.

24) Wie viele bayr. Maß geben 1164, 1746 oder 2910 württembergische Maß?

25) Wie viele Hektoliter machen so viel aus wie 70, 90 oder 180 bayr. Scheffel? 1 bayr. Scheffel verhält sich zu 1 Hektoliter wie 22,2 zu 10.

26) Wie viele bayr. Scheffel geben 111, 888 oder 37 Hektoliter?

27) Wie viele Hektoliter sind 81, 108 oder 243 bayr. Metzen? 1 bayr. Metzen verhält sich zu 1 Hektoliter wie 10 zu 27.

28) Wie viele bayr. Metzen sind 20, 50 oder 60 Hektoliter?

29) Wie viele alte bayr. Handelspfund sind ebenso so schwer wie 140, 196 oder 252 Zollpfund? 28 Zollpfund halten mit 25 bayr. Handelspfund das Gleichgewicht.

30) Wie viele Zollpfund sind so schwer wie 75, 150 oder 225 bayr. Handelspfund?

31) Wie viele alte preuß. Pfund haben dasselbe Gewicht wie 500, 2000 oder 12000 alte bayr. Pfund? Das alte preuß. ℔. verhält sich zum alten bayr. ℔. wie 1000 zu 1195.

32) Ein silbernes Gefäß wiegt 471,6 Gramm, wie schwer müßte dasselbe sein, wenn es von Gold wäre? Das specifische

Gewicht (siehe unten Anmerkung) des Silbers ist 10,48 und das des Goldes 19,26.

33) Eine Eisenstange wiegt 3 Kg 8 Hg 9 Dg; welches Gewicht hätte sie, wenn sie von Kupfer wäre? Das specifische Gewicht des Eisens ist 7,78 und das des Kupfers 8,88.

34) Ein Scheit Buchenholz ist 15 *ℓℓ.* schwer; welches Gewicht hätte es, wenn es von Fichtenholz wäre? Das specifische Gewicht des Buchenholzes ist 0,75 und das des Fichtenholzes 0,48.

35) Wie viele Gulden geben 24,96 Mark? Die beiden Verhältnißzahlen bilde sich der Schüler selbst, indem er sowohl einen Gulden als auch 1 Mark in Kreuzern ausdrückt.

36) Wie viele Mark erhält man aus 315 Gulden?

37) Wie viele Gulden machen 88 Vereinsthaler?

38) Wie viele Vereinsthaler ergeben sich aus 196 Gulden?

39) Wie viele Franken sind in 124,28 Mark enthalten?

40) Wie viele Mark kommen 245 Franken gleich?

41) Wie viele russische Silberrubel gehen auf 648 Mark, da der Silberrubel sich zur Mark verhält wie 81 zu 25?

42) Wie viele Mark kommen auf 245 russische Silberrubel?

Anmerkurg. Man unterscheidet ein specifisches und absolutes Gewicht:

a) Das specifische Gewicht eines Körpers ist diejenige Zahl, welche angibt, wie vielmal derselbe schwerer oder leichter ist als ein gleich großes Volumen Wasser.

Ein Kubikcentimeter reinen Wassers wiegt 1 Gramm, also ein Kubikdecimeter oder Liter Wasser 1 Kilogramm.

b) Unter absolutem Gewichte eines Körpers versteht man die Anzahl der Gramme, welche er wiegt. Man findet das absolute Gewicht durch Rechnung, wenn man den Kubikinhalt mit dem specifischen Gewichte multiplicirt und für jedes Kubikcentimeter ein Gramm nimmt.

c) Die absoluten Gewichte zweier Körper von gleichem Volumen (Kubikinhalt) verhalten sich wie die specifischen Gewichte.

Von folgenden Körpern bezeichnet die beigesetzte Zahl das specifische Gewicht (aus Fliedner):

Platin 21,45	Nickel 8,48
Gold 19,26	Zinn 7,29
Silber 10,48	Zink 7,19.
Quecksilber 13,60	Schmiedeisen 7,78
Blei 11,35	Gußeisen 7,21
Kupfer 8,88	Stahl 7,82

Gußstahl 7,92
Messing 7,6 — 8,8
Sandstein 2,0 — 2,7
Granit 2,54 — 3,1
Kieselstein 2,3 — 2,7
Basalt 2,0 — 3,3
Marmor 2,7 — 2,8
Fensterglas 2,64
Eis 0,916

Lufttrockenes Holz:
Ebenholz 1,19
Buxbaum 0,94
Rothbuche 0,75
Birke 0,74
Eiche 0,65
Ahorn 0,64
Kiefer 0,55
Rothtanne 0,48
Kork 0,24

2. Mehrfache Reduktionen von Maßen, Münzen und Preisen.

§ 93.

Erklärungen.

1) Kommen in einer Aufgabe mehrere Reductions-Verhältnisse vor, so ignorire man während der Vorbereitung zum Ansatze noch vorläufig alle Reductions-Verhältnisse und orientire sich bloß über den einfachen Bedingungs- und Fragesatz von 4 Gliedern für Waare und Preis, womit man das Material zu einer einfachen Proportion gleichsam als Fundament hat, schreibe die beiden Bedingungsglieder als Vorbereitung wie gewöhnlich neben einander und die beiden Frageglieder darunter; dann erst setze man auch die Reduktionszahlen paarweise und ohne Benennung daneben und zwar so, daß je 2 zu einem Verhältnisse zusammengehörende Zahlen unter einander zu stehen kommen; hierauf setze man aus diesem so geordneten Materiale die zusammengesetzte Proportion an (siehe weiter unten Beispiel von 3)].

2) Beim Ansetzen der Maß-Reduktionsverhältnisse zur Proportion muß man bloß darauf achten, ob das fragliche Maß oder Gewicht (das Maß oder Gewicht selbst, nicht die zugehörige Zahl), für welches der Preis berechnet werden soll, größer oder kleiner ist als das andere, für welches der Preis gegeben ist. Zeigt sich das fragliche Maß oder Gewicht größer, so kostet es auch mehr und wird das Reductions-Verhältniß steigend angesetzt; ist es aber kleiner, so entspricht ihm auch ein kleinerer Preis und wird das Verhältniß fallend angeschrieben; z. B. Meter kosten mehr als ebenso viele bayr. Fuß einer Waare; aber Liter kosten weniger als ebenso viele alte bayr. Maß.

Umgekehrt steht es beim Münz-Reduktions-Verhältnisse: ist die fragliche Münze, in welcher der Preis resultiren soll, größer

als die andere Münze, in welcher der Preis gegeben ist: so genügen weniger Stück für den Preis und wird das Verhältniß fallend, im entgegengesetzten Falle steigend angesetzt. Soll z. B der Preis in Gulden statt in Mark herauskommen, so genügen weniger Stück von den ersteren und wird daß Verhältniß fallend; sollen aber Franken statt Mark herauskommen, so braucht man zum Preise mehr Franken- als Markstück und wird steigend angesetzt.

3) Beim Ansatze eines jeden Reduktions-Verhältnisses muß man vor Allem wissen, welches von den beiden Maßen, Gewichten oder Münzen größer oder kleiner ist, um daraus zu folgern, ob das Reduktions-Verhältniß steigend oder fallend angesetzt werden muß. Dieß läßt sich stets aus der Vergleichung der beiden benannten Reduktionszahlen beurtheilen; z. B. wenn 1000 alte bayr. Pfund so schwer sind wie 1195 alte preußische Pfund, so muß nothwendig das preuß. Pfund leichter sein als das bayerische, da mehr preußische als bayerische Pfund erforderlich sind, damit beide Gewichtsmengen einander das Gleichgewicht halten.

Folgende Aufgabe diene als Beispiel zur Anschauung und zum besseren Verständnisse:

Ein Berliner kauft in Oesterreich Wein und zwar 75 Maß österreichisch um 120 Gulden österr. Währung; er möchte wissen, wie viele Mark ihm das Liter kostet, da 10 österreichische Maß so viel sind wie 14,15 Liter und 1 österreichischer Gulden 2 Mark gleich kommt.

Ansatz.

Einfacher Bedingungssatz: Er kauft 75 ö. Maß um 120 fl. ö. W.
Einfacher Fragesatz: Wie viele Mark kostet 1 Liter?

75 österr. Mß.	120 fl. ö. W.	10	1
1 Liter	x Mark	14,15	2

75 : 1 = 120 : x
14,15 : 10
1 : 2

Bei dem Fragegliede 1 Liter gilt zunächst für den Ansatz des Waarenverhältnisses noch nicht die Benennung Liter, sondern öst. Maß und ist zuerst der Preis für 1 öst. Maß festzustellen; diese kostet weniger als 75 Maß, daher ist das Waaren-Verhältniß fallend anzusetzen, nämlich 75 : 1. Jetzt erst fragt man, was

1 Liter statt 1 Maß kostet und wird der Preis von 1 Maß in den von 1 Liter verwandelt und zwar mittels des Maß-Reduktions-verhältnisses, indem dieses fallend angeschrieben wird, also 14,15 : 10, weil das Liter kleiner als die Maß ist und folglich auch weniger kostet. Bis daher versteht sich der Preis noch in öst. Gulden; es sollen aber die Gulden für 1 Liter in Mark umgewandelt werden, was durch das Münz-Verhältniß geschieht, wenn man es steigend ansetzt, nämlich 1 : 2, da die Mark kleiner ist als der öst. Gulden und somit mehr Mark erforderlich sind, um den gleichen Preis zu repräsentiren.

§ 94.

Uebungs-Aufgaben.

1) Ein Oekonom kauft 8 Hektar Ackerfeld um 14064 Mark; wie viele Gulden kostet davon 1 bayr. Tagwerk, da 10 Hektar 29,3 bayr. Tagwerk gleichkommen und 12 Mark so viel sind wie 7 Gulden südd. Währung?

2) Wenn 12 bayr. Scheffel Gerste 111 Vereinsthaler kosten, wie hoch kommen davon 9 Hektoliter in deutscher Reichsmünze, da der bayer. Scheffel sich zum Hektoliter verhält wie 22,2 zu 10 und 1 Vereinsthaler gleich 3 Mark ist?

3) Ein Getreidehändler kaufte in Ungarn 90 ungarische Metzen Weizen um 373 Gulden öst. Währ. und verkaufte davon wieder 54 Scheffel in Preußen; was löste er aus diesen in Vereinsthalern, da er sie wieder um denselben Preis verkaufen mußte, als er sie gekauft hatte? 111,9 preußische Scheffel sind 100 ungarischen Metzen gleich und der Vereinsthaler verhält sich zum öst. Gulden wie 3 zu 2.

4) Ein Getreidehändler kaufte in Württemberg 189 Simri Roggen um 150 Kronenthaler und verkaufte davon wieder 80 Metzen in Bayern; wie viele Gulden südd. Währ. nahm er dafür ein, da der Kauf- und Verkaufpreis für die 80 Metzen gleich waren? 1 württembergisches Simri verhält sich zu 1 bayr. Metzen wie 100 zu 167,3 und 27 Gulden südd. Währ. haben denselben Werth wie 10 Kronenthaler.

5) Jemand ließ die Vorderseite seines Hauses mit Oelfarbe anstreichen und hatte für 1600 □Fuß 80 fl. südd. Währung zu bezahlen; wie viele Vereinsthaler kosten ihm davon 350 □Meter?

Der bayer. Quadratfuß verhält sich zum □Meter wie 100 zu 1174 und 7 Gulden südd. Währ. geben 4 Vereinsthaler.

6) Von einem Grundstücke wurden 100 □Klafter bayr. um 150 Gulden südd. Währ. verkauft; wie viele Ar kommen auf 978 Mark? 10 Ar geben 326 bayr. □Klafter und 1 Gulden verhält sich zu 1 Mark wie 60 zu 35.

7) 36 Brabanter Ellen von einem Wollenstoff kosten 15 bayr. Thaler; wie viele Vereinsthaler kosten davon 21 bayr. Ellen? 10 bayr. Ellen sind 12 Brabanter Ellen gleich und der Vereinsthaler verhält sich zum bayr. Thaler wie 1,75 zu 2,4.

8) Von einer Waare kosteten 32 badische Fuß 226 Vereinsthaler; wie viele russische Silberrubel kosteten davon 1084 russische Fuß? 542 russische Fuß sind so viel wie 973 badische Fuß; der Werth eines russischen Silberrubels beträgt 113 bayr. Kreuzer und der des Vereinsthalers 105 Kreuzer.

9) Auf der Eisenbahn fährt man eine Strecke von 65 Kilometer um 2 Mark 25 Pf.; wie viele Franken beträgt die Fahrtaxe für 104 Poststunden? 10 Poststunden = 37 Kilometer und 4 Mark = 5 Franken.

10) Für das Dampfschiff auf dem Bodensee kostet die Fahrt von Lindau bis Ludwigshafen, eine Entfernung von 57 Kilometer, 2. Klasse 3 Mark 65 Pf. Wie groß muß die Entfernung in Poststunden von Bregenz bis Constanz sein, da hiefür die Fahrtaxe 1,7 Gulden macht? 1 Poststunde = 3,7 Kilometer und 12 Mark = 7 Gulden südd. W.

11) Beim Graben eines Kanals kommt die Aushebung von 100 Kubikmeter Erde auf 48 Mark; was kosten hievon 2000 bayr. Kubikfuß in Fünffrankenthalern? 1 bayr. Kubikfuß = 0,025 Kubikmeter und 1 Fünffrankenthaler = 4 Mark.

12) Wenn 2 Kubikcentimeter Feingold 108 Mark werth sind, welchen Werth in Dollars haben 310 Kubikzoll Feinsilber? 10 Kubikzoll = 144 Kubikcentimeter; 7 Dollars = 30 Mark; Gold- und Silberwerth verhalten sich zu einander wie $15\frac{1}{2}$ und 1.

13) Wie viele Franken kosten 343 Ster Fichtenholz, wenn 12 alte bayr. Holzklafter Buchenholz 180 Gulden südd. Währ. kosten? Die alte bayr. Holzklafter verhält sich zum Ster wie 126 zu 40,2; der Preis des Buchenholzes verhält sich zum Preise des Fichtenholzes wie 7 zu 5; 7 Gulden = 15 Franken.

14) Wie viele alte bayr. Holzklafter Birkenholz erhält man um 210 Gulden südd. W., wenn 21 Ster Buchenholz 168 Gulden österr. W. kosten? 40,2 bayr. Holzklafter = 126 Ster; der Preis des Birkenholzes verhält sich zu dem des Buchenholzes wie 6 zu 7; der österr. Gulden verhält sich zum süddeutschen Gulden wie 7 zu 6.

15) Jemand kauft 50 Liter französischen Wein um 108 Franken und 58 österreichische Maß Ungarwein; was kostet dieser in Gulden österr. Währ., wenn der Preis des französischen Weines sich zu dem des Ungarweines verhält wie 3 zu 2? Es verhält sich ferner die österr. Maß zum Liter wie 1,25 zu 0,87; 2 österr. Gulden = 5 Franken.

16) Ein Materialist kaufte 3 bayr. Eimer 90procentigen Spiritus um 89,6 Gulden südd. W. und 15 Hektoliter 60procentigen Spiritus; wie viele Franken kostet dieser, wenn der Preis dem Prozentgehalte des Alkohols proportional ist? 10 Hektoliter = 14,6 bayr. Eimer; 15 Franken = 7 Gulden südd. W.

17) Wie viele Liter Weizenbier erhält man um 180 Mark, wenn 20 bayr. Maß Gerstenbier $2\frac{1}{3}$ Gulden südd. Währung kosten und der Preis des Weizenbieres zu dem des Gerstenbieres sich verhält wie 9 zu 7? Die bayr. Maß verhält sich zum Liter wie 1069 zu 1000; 12 Mark = 7 Gulden südd. W.

18) Wie viele Mark kosten 49 Zollpfund Rindfleisch, wenn 24 bayr. Pfund Kalbfleisch 6 Gulden südd. W. kosten und der Preis des Rindfleisches zu dem des Kalbfleisches sich verhält wie 4 zu 3? Das bayr. Pfund verhält sich zum Zollpfund wie 28 zu 25; 12 Mark = 7 Gulden südd. W.

19) Ein Krämer kaufte von einem Großhändler 60 württembergische Pfund Kaffeebohnen um 25 Vereinsthaler und von einem anderen Großhändler 194 öst. *ℳ.*; wie viele öst. Gulden kosteten diese, wenn sich der Preis der ersteren zu dem der letzteren verhält wie 48 zu 52? 112 württembergische Pfund = 97 österr. Pfund; 2 Vereinsthaler = 3 öst. Gulden.

20) Jemand bezog von einem Lieferanten 165 Zollpfund Mehl um 54 Mark und von einem anderen Lieferanten ein Quantum Mehl um 125 russische Silberrubel; wie viele russische Pfund wog dieses Quantum Mehl, wenn der Preis des ersteren Mehles sich

zu dem des letzteren verhält wie 6 zu 5? 110 Zollpf. = 122 russ. ℔.; 81 Mark = 25 russ. Silberrubel.

Procent-Rechnungen.

§ 95.

Procent (pro centum) ist im weiteren Sinne arithmetisch Alles, was sich auf 100 bezieht [siehe § 77, c)]. Wenn z. B. nach einem statistischen Berichte in Niederbayern 3 Procent Wehrpflichtige eine mangelhafte Schulbildung haben, so heißt dies: unter je 100 Wehrpflichtigen sind 3 mit mangelhafter Schulbildung. Oder: wenn ein Spiritus 90procentig ist, so heißt das: unter je 100 Theilen Spiritus sind 90 Theile Alkohol (und 10 Theile Wasser).

Sehr häufig kommen die Procente bei den Gewinn- oder Verlustrechnungen zur Anwendung, in welchen der Gewinn oder Verlust nach Procenten entweder gegeben oder zu suchen ist. Z. B. Jemand kauft Waare um eine gewisse Geldsumme und verkauft sie wieder mit 20 Proc. Gewinn, das heißt: er gewinnt mit je 100 Mark der Kaufsumme 20 M., so daß aus je 100 M. des Kaufpreises 120 M. Verkaufpreis werden und der Kauf- zum Verkaufpreis sich verhält wie 100 zu 120. Werden aber 20 Procent verloren, d. h. werden von je 100 M. der Kaufsumme 20 M. verloren, so reduciren sich je 100 M. des Kaufpreises auf 80 M. Verkaufpreis und verhält sich der Kauf- zum Verkaufpreis wie 100 zu 80.

Je nachdem man nun 20 Procent gewinnt oder verliert, hat man die Verhältnißzahlen 100 und 120 oder 100 und 80 als Verhältniß von Kauf und Verkaufpreis in die Proportion zu setzen und wohl zu unterscheiden, ob das Verhältniß steigend oder fallend sein muß, um aus dem Kauf- den Verkaufpreis, oder umgekehrt, zu erhalten.

A. Aufgaben mit gegebenen Procenten.

§ 96.

a. Den Kauf- oder Verkaufpreis zu berechnen.

Beispiel.

Ein Weinwirth kaufte 3 Hektoliter 60 Liter Wein um 480 Mark; wie theuer muß er das Liter verkaufen, wenn er 25 Proc. gewinnen will?

Ansatz.

Liter	M.	
360	480	100
1	x	125

360 : 1 = 480 : x
100 : 125

Uebungs-Aufgaben.

1) Ein Kaufmann kauft 18 Kilo einer Waare um 360 M. und verkauft sie wieder; wie theuer muß er 1 g verkaufen, wenn er 20 Proc. gewinnen will?

2) Ein Getreidehändler kauft 36 Doppelhektoliter Weizen um 1440 M. und verliert beim Verkauf 3 Proc.; wie theuer muß er 1 Hektoliter verkaufen?

3) Jemand kauft ein Haus um 20450 M. und verkauft es wieder mit 6 Proc. Verlust; wie theuer hat er es verkauft und wie groß war sein ganzer Verlust?

4) Ein Kaufmann kauft 408 Kilo Kaffeebohnen und verkauft das Pfund wieder um $1\frac{1}{2}$ M. mit 12 Proc. Gewinn; wie theuer kaufte er das ganze Quantum?

5) Jemand verkaufte 30 Ar Wiesengrund um 1620 M. mit 8 Proc. Gewinn; wie theuer hatte er 1 Ar gekauft?

6) Ein Holzhändler verkaufte 60 Ster Fichtenholz um 520 M.; wie theuer hatte er das Ster gekauft, wenn er 9 Procent gewann?

7) Ein Krämer kaufte ein Quantum Schmalz um 52,90 M., er verkauft das Pfund wieder um 1 M. 15 Pf. und gewinnt dabei 15 Proc.; wie viel wog das Quantum?

8) Ein Schnittwaarenhändler kaufte ein Stück Leinwand um 20,40 M. und verkauft das Meter wieder um 85 Pfennig mit 7 Proc. Gewinn; wie viele Meter waren an diesem Stück?

9) Ein Schenkwirth bezog von seinem Brauer ein Faß Bier um 14 M. 50 Pf., er verkauft das Liter um 15 Pf. mit 16 Proc. Verlust, da es durch unrichtige Behandlung Schaden litt; wie viele Liter hält das Faß?

10) Ein Weinwirth bezog aus Frankreich 213,8 Liter Wein um 500 Franken und verkaufte ihn in Bayern wieder mit 25

Procent Gewinn. Wie theuer gab er die alte bayr. Maß in südd. W. wieder ab, da 1000 bayr. Maß = 1069 Liter sind und der Franke sich zum bayr. Gulden verhält wie 28 zu 60?

11) Ein russ. Kaufmann kaufte in Norddeutschland 63 alt-preuß. Ellen Tuch um 150 Vereinsthlr.; um wie viele Silberrubel muß er die russ. Elle wieder verkaufen, wenn er 13 Proc, gewinnen will? 10 russ. Ellen = 10,6 alt-preuß. Ellen und 105 Silberrubel = 113 Vereinsthlr.

12) Ein Steinkohlenhändler kaufte eine Wagenladung Steinkohlen von 272,3 Zollzentner und verkaufte sie wieder, den alt-württembergischen Zentner um 50 Kreuzer südd. Währung mit 25 Proc. Gewinn. Wie viele Franken hat ihm die ganze Wagenladung selbst gekostet? Der altwürtt. Ztr. verhält sich zum Zoll-Zentner wie 97,25 zu 100; 1 Franke = 28 Kreuzer.

13) Ein Getreide-Händler kaufte in Bayern 56,43 bayr. Scheffel Gerste und verkaufte sie wieder in Preußen, den preuß. Scheffel um $2\frac{1}{25}$ preuß. Thaler; die Transportkosten betrugen 5 Proc. des Kaufpreises, auf dem Transporte gingen ihm durch zerrissene Säcke 5 Proc. Getreide verloren, trotzdem gewann er noch 2 Proc. Wie viele bayr. Gulden kosteten ihm die 56,43 bayr. Scheffel? 100 preuß. Scheffel = $24\frac{3}{4}$ bayr. Scheffel; 7 bayr. Gulden = 4 preuß. Thlr.

14) Ein Handelsmann kaufte ein Quantum Flüssigkeit um 500 M., dieselbe wurde durch sein eigenes Verschulden beschädigt und deßhalb verlor er beim Verkauf 20 Proc., indem er für die bayr. Maß nur $1\frac{1}{20}$ Gulden südd. W. löste; die Transportkosten betrugen 8 Proc. des Kaufpreises. Wie viele Liter macht das ganze Quantum aus? 1000 bayr. Maß = 1069 Liter; 7 Gulden südd. W. = 12 Mark.

15) Ein Südfrüchtenhändler kaufte ein Faß Tiroler Weintrauben um 35 Gulden österr. W.; in Folge schlechter Verpackung und Aufbewahrung verdarben sie zum Theil und mußte er das Zollpfund um $\frac{1}{4}$ Mark mit 25 Proc. Verlust verkaufen, der Transport kostete 2 Proc. des Kaufpreises. Wie viele österr. Pfund Trauben enthielt das Faß? 100 österr. Pfd. = 112 Zollpfund; 2 M. = 1 fl. öst. W.

b. Tara-Rechnungen.

§ 97.

1) In den Tararechnungen sind folgende Kunstwörter aus der italienischen Sprache gebräuchlich:

Tara oder fusti, Abzug; netto, rein; brutto oder sporco, unrein; emballage (französisch), Waarengefäß, Packhülle.

Taragewicht ist das Gewicht der emballage, Bruttogewicht das Gewicht der Waare sammt der emballage, Nettogewicht das Gewicht der bloßen Waare ohne emballage, Fusti-Gewicht der Abzug vom Gewichte solcher Waare, welche auf dem Transporte beschädigt wurde; sporco wird statt brutto bei fetten Waaren gebraucht.

2) Bei Waarensendungen kann manche Waare vom Käufer nicht ohne die Emballage gewogen werden, daher wird schon vom Verkäufer die leere Emballage gewogen und dem Käufer der Abzug des Taragewichtes am Bruttogewichte in der Waarenrechnung gewährt.

Dieser Abzug geschieht gewöhnlich nach Procenten und zwar entweder vom Hundert, wobei z. B. 6 Pfd. tara von je 100 Pfd. brutto subtrahirt werden, so daß das Brutto- zum Netto-Gewicht sich verhält wie 100 zu 94 und für je 100 Pfd. nur 94 Pfd. zu bezahlen sind; oder aufs Hundert, wobei 6 Pfd. tara zu je 100 Pfd. netto addirt werden, so daß das Brutto- zum Nettogewicht sich verhält wie 106 zu 100 und statt 106 Pfd. stets nur 100 Pfd. zu bezahlen sind. Mittels eines der beiden erwähnten Verhältnisse kann das Brutto- in das Nettogewicht oder das Netto- in das Bruttogewicht verwandelt werden, je nachdem man das Verhältniß fallend oder steigend in den Ansatz bringt.

Beispiel.

Ein Kaufmann erhält eine Waarensendung von 450 Kilogramm brutto, wovon 1 Pfd. netto 1,20 ℳ. kostet. Wie viel hat er zu bezahlen, a) wenn 8 Pfd. tara vom Hundert gerechnet werden? und b) wenn 8 Pfd. tara aufs Hundert zu rechnen sind?

Welche Tara ist für den Käufer vortheilhafter, die vom oder die aufs Hundert?

Ansatz.

a) ℔.	ℳ.			b) ℔.	ℳ.		
1 netto	1,2	92		1 netto	1,2	100	
900 brutto	x	100		900 brutto	x	108	
1 : 900	= 1,2	: x		1 : 900	= 1,2	: x	
100 : 92				108 : 100			

§ 98.

Uebungs-Aufgaben.

1) Ein Kaufmann erhält von einer Waare 364 Kg brutto, wovon 1 Kg netto 2,50 ℳ kostet; wie viel hat er zu bezahlen, wenn 5 Pfd. tara vom Hundert genommen werden?

2) Ein Handelsmann erhält eine Sendung Waare von 168 Kg. brutto; wie viel muß er bezahlen, wenn 20 g netto 48 Pfg. kosten und 12 Pfd. tara aufs Hundert gerechnet werden?

3) Von einer Waarensendung kosten 30 g netto 85 Pf.; was kosten 34,5 Kg brutto, wenn 15 Pfd. tara aufs Hundert in Rechnung kommen?

4) Jemand läßt sich von einem Fabrikanten Oel schicken und zwar 436 Pfd. sporco; welche Zahlung hat er zu leisten, wenn das Pfund netto 71 Pf. kostet und 9 Pfd. tara aufs Hundert gerechnet werden?

5) Ein Krämer erhält aus einer Fabrik eine Waarenlieferung von 205 Kg brutto; was kostet diese, da er für das Pfd. netto 1,10 ℳ zahlt und 17 Pfd. fusti vom Hundert in Ansatz kommen?

6) Wie hoch kommt eine Waarensendung von 124 Pfd. sporco, wenn 18 g netto 12 Pf. kosten und 13 Pfd. tara vom Hundert gewährt werden?

7) Ein Kaufmann bekommt an Waare 190,4 Pfd. brutto, wovon 45 g netto 9 Pf. kosten; wie viel hat er zu bezahlen, da 19 Pfd. tara aufs Hundert vereinbart sind?

8) Wie groß ist das Bruttogewicht einer um 456 ℳ und mit 11 Pfd. tara aufs Hundert gelieferten Waare, von welcher das Pfd. netto 1,14 ℳ kostet?

9) Ein Händler muß für eine Sendung Waare 696 ℳ zahlen, davon kosten 90 g netto 1,16 ℳ, als tara werden ihm 10 Pfd. vom Hundert gestattet; wie groß ist das Bruttogewicht?

10) Einem Kaufmann wird aus einer Fabrik um 516 ℳ Waare geschickt, davon kostet das Kilogramm netto 3,60 M., als Tara sind 14 Pfd. vom Hundert ausbedungen; wie groß ist das Bruttogewicht?

11) Ein Handelsmann bezieht aus einer Fabrik an Waare 963 Kg brutto mit 7 Pfd. tara aufs Hundert; wie groß ist das Nettogewicht?

12) Wie groß ist das Nettogewicht einer Waare, wenn das Bruttogewicht 831 Kg und das Taragewicht 21 Pfund vom Hundert beträgt?

c. Rabatt-Rechnungen.

§ 99.

1) Unter Rabatt versteht man einen Nachlaß oder Abzug an einer Geldsumme nach Procenten besonders bei Waaren- und Wechselzahlungen. Die sogleich beim Empfange einer Waare geleistete Zahlung heißt Baarzahlung; die später nach Ablauf einer bestimmten Zahlungsfrist zu entrichtende Summe nennt man Schuld. Die Schuld ist größer als die Baarsumme und zwar um den Zins, welchen die Baarsumme während der Zahlungsfrist trägt. Der Fabrikant verkauft nämlich seine Produkte meistens auf Zeit, d. h. er verlangt nicht, daß der Käufer die Waare sogleich beim Empfange baar bezahle, sondern er bestimmt einen Termin, bis zu welchem die Zahlung zu erfolgen hat, nimmt aber dafür so viel Zins, als die Baarsumme während der Zeit vom Empfange der Waare bis zum Zahlungstermine trägt und schlägt ihn schon im Voraus zur Baarsumme.

Auch eine Wechselschuld, auf welche der Wechsel lautet, ist um den Zins für die Zeit vom Ausstellungs- bis zum Verfalltage größer als die dem Aussteller ausbezahlte Baarsumme.

Der Rabatt ist daher dem Wesen nach nichts anderes, als der oben erwähnte, vorausberechnete und zur Baarsumme geschlagene Zins, welcher, wenn sich der Käufer erbietet, sogleich beim Empfange der Waare baar zu bezahlen, wieder in Abzug kommt.

Man unterscheidet einen Rabatt vom Hundert und aufs Hundert. Der Rabatt vom Hundert, z. B. 4 *M.*, wird von je 100 *M.* abgezogen, so daß für je 100 *M.* nur 96 *M.* zu bezahlen sind; es verhält sich also die Schuld zur Baarsumme wie 100 zu 96. Beim Rabatt aufs Hundert werden die 4 *M.* zu je 100 *M.* addirt und sind für je 104 *M.* nur 100 *M.* zu bezahlen, wornach sich die Schuld zur Baarsumme verhält wie 104 zu 100.

Bei Wechselzahlungen heißt der Rabatt Diskonto und wird dieser gewöhnlich vom Hundert genommen; obwohl er aufs Hundert richtiger wäre, weil der Diskonto, z. B. 5 Proc., als Zins für 100 berechnet und zu 100 addirt wurde, wodurch 100 auf 105 sich

erhöhte; folglich müßte bei der Zahlung vor der Verfallzeit wieder von 105 auf 100 und nicht von 100 auf 95 zurückgegangen werden. Der Diskonto vom Hundert ist eine Begünstigung für den Diskonto-Nehmer.

2) Baarsumme und Schuld erhält man entweder, wenn zuerst der ganze Abzug berechnet und dieser von der Schuld abgezogen, beziehungsweise zur Baarsumme addirt wird; oder, wenn man das Produkt aus Procent und Zeit von oder auf 100 rechnet und mit dem daraus entstandenen Verhältnisse zwischen Baarsumme und Schuld diese in jene, oder umgekehrt, verwandelt. Beim letzteren Verfahren ist nämlich für 1 Jahr der einfache Rabatt von oder auf 100 zu nehmen, für 2 Jahre der doppelte, für 3 Jahre der dreifache ꝛc.; folglich immer das Produkt aus Procent und Zeit.

Beispiel.

Jemand hat 500 *M.* nach 9 Monaten zu bezahlen, wenn er aber sogleich bezahlt, so werden ihm 6 Proc. Rabatt vom Hundert gewährt; wie groß ist die Baarsumme?

Auflösung.

I. Verfahren.

Summe *M.*	Jhr.	Abzug *M.*
100	1	6
500	$\frac{3}{4}$	x

$100 : 500 = 6 : x$
$1 : \frac{3}{4} \quad 3$
4
2

$2 : 15 = 3 : x$

$x = \frac{15 \times 3}{2} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$ *M.* ganzer Abzug.

$500 - 22\frac{1}{2} = 477\frac{1}{2}$ *M.* Baarsumme.

II. Verfahren.

$6 \times \frac{3}{4} = 4\frac{1}{2}$ *M.* Abzug vom Hundert für $\frac{3}{4}$ Jahre.

Schuld *M.*	Baarsumme *M.*
100	$95\frac{1}{2}$
500	x

$100 : 500 = 95\frac{1}{2} : x$
$2 \qquad 191$

$2 : 5 = 191 : x$

$x = \frac{5 \times 191}{2} = \frac{955}{2} = 477\frac{1}{2}$ *M.* Baarsumme.

§ 100.

Uebungs-Aufgaben.

1) Jemand hat erst nach $\frac{3}{4}$ Jahren eine Schuld von 840 *M.* zu bezahlen, wenn er aber sogleich bezahlt, so werden ihm 5 Proc. Rabatt vom Hundert gewährt; wie groß ist die Baarsumme?

2) Ein Schuldner soll nach 2 Jahren 3 Monaten 2643 *M.* bezahlen; wie groß ist die Baarsumme, wenn ihm $4\frac{1}{2}$ Proc. Rabatt auf's Hundert gerechnet werden?

3) Wie groß ist die Baarsumme einer erst nach 3 Jahren 2 Monaten zu bezahlenden Schuld von 975 *M.*, wenn $4\frac{4}{5}$ Proc. Rabatt vom Hundert gestattet werden?

4) Jemand hat nach 1 Jahre 1 Monate 1704 *M.* zu bezahlen; wie viel beträgt die Baarsumme bei 6 Proc. Rabatt aufs Hundert?

5) Ein Kaufmann bezieht aus einer Fabrik um 480 *M.* Waare, welche er erst nach 4 Monaten bezahlen muß; da er aber sogleich bezahlen will, so werden ihm 7 Proc. Rabatt vom Hundert gewährt. Wie viel beträgt die Baarsumme?

6) Ein Krämer bezieht von einem Großhändler um 909 *M.* Waare, welche er erst nach 3 Monaten zu bezahlen verpflichtet ist; er bezahlt aber sogleich und erhält deshalb 4 Proc. Rabatt aufs Hundert. Wie viel macht die Baarsumme?

7) Jemand soll 1060 *M.* nach 3 Jahren 8 Monaten bezahlen; wie viel beträgt die Baarsumme bei $4\frac{1}{2}$ Proc. Rabatt vom Hundert?

8) Wie viel sind 12110 *M.*, welche nach Verlauf von 2 Monaten zu entrichten sind, jetzt werth, wenn $5\frac{1}{2}$ Proc. Rabatt aufs Hundert gewährt werden?

9) Ein Großhändler bezieht aus einer Fabrik um 1410 *M.* Waare, welche er nach 5 Monaten zu bezahlen hat; wie groß ist die Baarsumme, wenn 8 Proc. Rabatt vom Hundert vereinbart sind?

10) Jemand kauft ein Haus um 21240 *M.*, wovon er nach Uebereinkunft die Hälfte sogleich und die andere Hälfte erst nach 4 Jahren bezahlt; wie viel macht die Baarsumme des Hauses, wenn man $4\frac{1}{2}$ Proc. Rabatt aufs Hundert annimmt?

11) Jemand hat sich verpflichtet eine gewisse Schuld nach 10 Monaten zu bezahlen; da er aber sogleich unerwartet zu Geld kam, so zahlte er 2448 *M.* baar unter 5 Proc. Rabatt aufs Hundert. Wie hoch belief sich die Schuld?

12) Wie groß ist eine Schuld, wenn sie durch Baarzahlung von 6015 *M.* unter 5 Proc. Rabatt aufs Hundert um 1 Jahr 4 Monate früher getilgt wird, als vereinbart ist?

13) Ein Wechsel von 492 *M.* ist nach 2 Monaten zahlbar; wie viel beträgt jetzt sein Baarwerth bei 5 Proc. Diskonto?

14) Ein Wechsel von 535 *M.* ist nach 8 Monaten fällig; wie viel macht die Baarsumme, wenn er jetzt mit 6 Proc. Diskonto verkauft wird?

15) Jemand kann einen Wechsel von 816 *M.*, welcher nach 1 Jahre 3 Monaten zahlbar ist, sogleich mit 4½ Proc. Diskonto verkaufen; wie viel ist der Wechsel jetzt werth?

16) Jemand kann einen nach 10 Monaten zahlbaren Wechsel von 360 *M.* gegen 4½ Proc. Diskonto versilbern; wie viel ist der Wechsel jetzt werth?

17) Welche Baarsumme wurde dem Aussteller eines nach 1 Jahre 2 Monaten fälligen Wechsels von 1947 *M.* ausbezahlt, wenn der Diskonto 7 Proc. aufs Hundert beträgt?

18) Ein Wechsel von 910 *M.* wurde am 1. Mai ausgestellt; wie viel ist er am 15. Juli werth, wenn er am 1. Dezember fällig ist und 8 Proc. Diskonto gerechnet werden?

d. Agio-Rechnungen.

§ 101.

Agio, Aufgeld oder Aufwechsel, ist die Vergütung, welche dem Geldwechsler für den Umtausch einer ungangbaren Geldsorte gegen eine gangbare gewöhnlich nach Procenten vom oder aufs Hundert entrichtet wird.

Agio ist auch die Differenz zwischen dem reellen und nominellen Werthe eines Objektes, zwischen geprägtem Gelde und Banknoten, zwischen in- und ausländischem Gelde. Das Agio zwischen Gold- und Silbermünzen, sowie zwischen Silbermünzen und Banknoten findet sich nach Prozenten in den Curszetteln. Die Höhe des Agios hängt von verschiedenen Verhältnissen ab, besonders vom Angebote und der Nachfrage, bei Banknoten auch vom Credite des Staates oder des Consortiums, von welchem dieselben emittirt sind.

Provision und Courtage sind Gebühren, welche die Vermittler bei Börsengeschäften, die Banquiers und Makler, für ihre Vermittelung nach Procenten und Promillen der Kaufsumme erhalten. Provision ist im weiteren Sinne auch eine Gebühr für die Mühewaltung der Commissionäre, Faktoren und Spediteure.

Curs ist der durch Angebot und Nachfrage an den Börsen bestimmte veränderliche Preis von Waaren, Geldsorten und Werthpapieren (Wechsel, Aktien, Staatspapiere ꝛc.); von den letzten versteht sich der Curs meistens in Prozenten des Nennwerthes.

§ 102.

Uebungs-Aufgaben.

1) Ein nach Frankreich reisender Deutscher tauscht sein Reisegeld von 609 ℳ. an der Grenze bei einem Wechsler in lauter francs um und muß dabei 1½ Proc. Agio aufs Hundert bezahlen. Welchen Werth, in Mark ausgedrückt, hat sein Reisegeld noch nach dem Umtausche?

2) Jemand hat um 480 ℳ. ungangbare Münzen und tauscht sie gegen gangbare um, wobei er 2⅔ Proc. Agio vom Hundert bezahlen muß: welchen Werth hat sein Geld nach dem Umtausche?

3) Ein Engländer will Rußland bereisen und vertauscht um 1636 ℳ. englische Münzen gegen russische, wobei er 2¼ Proc. Agio aufs Hundert bezahlen muß; welchen Werth hat die Geldsumme nach dem Umwechseln?

4) Jemand hat lauter ungangbare Kronenthaler, im Werthe von 724 ℳ., für deutsche Reichsmünzen umgetauscht und mußte dabei 3½ Proc. Agio vom Hundert entrichten; wie viel erhielt er dafür?

5) Jemand hat noch um 418 ℳ. alte Conventionsthaler und tauscht sie in gangbare Münzen um gegen 4½ Proc. Agio aufs Hundert; wie viel erhält er in deutscher Reichswähr. dafür?

6) Ein Kaufmann hat um 367 ℳ. österr. Banknoten, er tauscht sie in Silbermünzen um, muß aber 10 Proc. Agio vom Hundert bezahlen; wie viel erhält er in deutscher Reichswährung?

7) Ein Handelsmann tauscht für 822 ℳ. österr. Münzen gegen 2⅔ Proc. Agio aufs Hundert in d. Reichsmünzen um; wie viel nimmt er dafür ein?

8) Ein Reisender wechselte italienisches Papiergeld, im Werthe von 310 ℳ., in deutsche Reichsmünzen um gegen 3 Proc. Agio vom Hundert; wie viel nahm er dafür ein?

9) Jemand tauschte für Papiergeld, im Werthe von 459 ℳ., lauter Gold ein und gab 2 Proc. Agio aufs Hundert; wie viel Gold erhielt er?

10) Ein Kapitalist kauft 6 Stück der österr. franz. Staatsbahn-Prioritäten à 500 francs zum Curse von 63 Proc. und zahlt für Provision und Courtage $\frac{5}{8}$ Proc. der Kaufsumme. Wie hoch kommen ihm diese Effekten? und wie viel macht der Zins zu 3 Proc. vom 1. März bis 8. Mai?

11) Jemand kauft 8 bayr. Obligationen à 100 ℳ. zum Curse von $101\frac{3}{8}$ Proc. und zahlt für Provision und Courtage $\frac{7}{8}$ Proc. der Kaufsumme. Wie viel hat er dafür zu bezahlen und wie viel beträgt der Zins zu $4\frac{1}{2}$ Proc. vom 1. Juli bis 12. Okt.?

12) Jemand kauft 25 Stück der Deutschen Effekten- und Wechsel-Bank-Aktien à 100 Thaler, für welche erst 40 Proc. eingezahlt sind, mit 6 Proc. Agio (Curs 106 Proc.); für Provision und Courtage wird ihm $\frac{1}{2}$ Proc. der Kaufsumme angerechnet. Welche Summe kosten ihm diese Aktien? und welchen Zins trifft es zu 5 Proc. vom 1. Januar bis 15. April?

B. Aufgaben mit zu suchenden Procenten.

§ 103.

Wie bekannt, gibt es bei den Proportions-Aufgaben stets je 2 gleichnamige Glieder, welche zusammen ein Verhältniß bilden. Sind die zu suchenden Procente ein Gewinn oder Verlust, so muß es in der Aufgabe noch einen zweiten in Rechnung kommenden Gewinn oder Verlust geben; dieser ist die Differenz zwischen Kauf- und Verkaufpreis und entweder schon direkt in der Aufgabe gegeben oder durch Subtraction zu finden. Die Summe, mit welcher der Gewinn oder Verlust gemacht wird, ist für die Procente stets 100 und für den anderen Gewinn oder Verlust der Kaufpreis. Im Allgemeinen hat man dann als

Bedingungssatz:	Der Kaufpreis — ℳ. gibt in — Jahren — ℳ. Gewinn oder Verlust;
als Fragesatz:	Wie viel Gewinn oder Verlust geben 100 ℳ. in 1 Jahre?

I. Beispiel.

Ein Handelsmann kauft um 650 ℳ. Waare und verkauft sie nach 8 Monaten wieder um 780 ℳ.; wie viel Procent gewann er?

780 — 650 = 130 *M.* Gewinn von 650 *M.*

Ansatz.

Kaufpr.	Jhr.	Gewinn
M.		*M.*
650	$\frac{2}{3}$	130
100	1	x

$$650 : 100 = 130 : x$$
$$\tfrac{2}{3} : 1$$

Der hieraus resultirende Gewinn beträgt 30 Proc.

II. Beispiel.

Ein Weinhändler kaufte 2 Hl 20 l Wein um 165 *M.*, nach 4 Monaten verkaufte er ihn wieder, das Liter um 90 Pf.; wie viel Procent hat er gewonnen?

Erklärung.

Den Kaufpreis 165 *M.* und den Verkaufpreis 90 Pf. kann man hier selbstverständlich nicht von einander subtrahiren, um den anderen Gewinn zu erhalten, weil sich diese Preise auf verschiedene Maße beziehen; es müssen zuerst die Preise für ein und dasselbe Maß bestimmt werden, entweder beide Preise für 2 Hl 20 l oder beide für 1 Liter. Für 2 Hl 20 l ist der Kaufpreis 165 *M.* gegeben und der Verkaufpreis zu bestimmen, dieser berechnet sich auf 198 *M.*; folglich gibt die Differenz 198 — 165 den Gewinn 33 *M.* Bedingungssatz: 165 *M.* geben in $\frac{1}{3}$ Jahr 33 *M.* Gewinn; Fragesatz: Welchen Gewinn erhält man in 1 Jahr von 100 *M.*?

Ansatz.

Kaufpr.	Jhr.	Gewinn
M.		*M.*
165	$\frac{1}{3}$	33
100	1	x

$$165 : 100 = 33 : x$$
$$\tfrac{1}{3} : 1$$

Hieraus ergeben sich 60 Proc. Gewinn.

§ 104.

Uebungs-Aufgaben *)

1) Ein Händler kauft um 250 M. Waare, er verkauft sie nach 2 Monaten wieder und macht einen Gewinn von 40 M.; wie viel Procent gewinnt er?

*) Bei manchen dieser Uebungs-Aufgaben könnte die angegebene Zeit außer Rechnung bleiben, besonders von solchen Aufgaben, bei welchen der

2) Jemand erhält um 360 M. Waare und verkauft sie wieder nach 9 Monaten um 423 M.; wie viel Proc. gewinnt er?

3) Jemand kaufte ein Pferd um 630 M. und verkaufte es nach 2 Jahren 6 Monaten wieder um 483 M.; wie viel Procent hat er verloren?

4) Ein Bauer kaufte ein Grundstück um 1080 M. und verkaufte es nach 4 Jahren 2 Monaten wieder um 1200 M.; wie viel Procent hat er gewonnen?

5) Jemand kaufte ein Haus um 8400 M., nach 5 Jahren 3 Monaten verkaufte er es wieder mit einem Verluste von 441 M.; wie viel Procent verlor er?

6) Ein Börsenspieler kaufte um 5500 M. Aktien, nach 1 Monat verkaufte er sie wieder mit einem Gewinne von 660 M.; wie viel Procent gewann er?

7) Ein Kaufmann kaufte 300 Kg Waare um 320 M., nach 9 Monaten war der ganze Vorrath wieder abgesetzt, das Pfd. um 55 Pf.; wie viel Procent hat er gewonnen?

8) Ein Krämer erhielt 270 Kg Kaffebohnen um 648 M.; wie viel Procent gewann er, wenn er im Verlaufe von 10 Mon. das ganze Quantum wieder absetzte, das Pfd. um 1 M. 40 Pf.?

9) Ein Weinwirth ließ sich 5 Hl Wein um 600 M. schicken, nach 5 Monaten war derselbe wieder literweise abgegeben, das Liter zu 1,29 M.; wie viel Procent gewann er?

10) Ein Weinhändler erstand bei einer Auktion 4 Hl Wein, das Liter zu 95 Pf.; nach 8 Monaten verkaufte er das ganze Quantum wieder um 456 M. Wie viel Proc. hat er gewonnen?

11) Ein Kaufmann bestellte bei einem Fabrikanten 130 Meter Tuch, à 6 M.; nach 1 Jahre 4 Monaten war alles Tuch wieder verkauft, er löste dafür 845 M. Wie viel Proc. gewann er?

12) Ein Schnittwaaren-Händler bezog 210 Meter Leinwand um 283,50 M. und verkaufte sie nach 9 Monaten wieder, das Meter um 1 M. 53 Pf.; wie viel Procent gewann er?

Handel, der Kauf und Verkauf, nicht fortgesetzt wird, sondern nur einmal geschieht. Die Zeit ist eigentlich nur dann zu berücksichtigen, wenn das von der abgesetzten Waare erhaltene Geld sogleich wieder zur Umsetzung neuer Waare verwendet wird, wie dies bei Kaufleuten und Händlern der Fall ist. Nichts desto weniger ist es der bloßen Uebung wegen zu empfehlen, bei allen obigen Uebungs-Aufgaben die angegebene Zeit mit in Rechnung zu bringen.

13) Ein Früchtenhändler erhielt eine Sendung von 380 Stück Pomeranzen um 57 M.; da sie ihm zum Theil verdarben, so mußte er durchschnittlich das Stück um 10 Pf. verkaufen, der Verkauf vollzog sich in 6 Wochen. Wie viel Procent verlor er?

14) Jemand kaufte ein Haus, verkaufte es nach 2 Jahren 3 Monaten wieder und gewann den 50. Theil des Kaufschillings; Wie viel Procent sind dies?

15) Ein Oekonom kaufte ein Grundstück, verkaufte es nach 6 Jahren 8 Monaten wieder und verlor den 25. Theil des Kaufpreises; wie viel Procent macht dies?

16) Ein Bauer kaufte einen Wald, verkaufte ihn nach 3 Jahren 5 Monaten wieder und gewann den 20. Theil des Kaufpreises; wie viel Proc. beträgt dies?

17) Ein Pferdehändler kauft ein Pferd, verkauft es nach 2 Monaten wieder und verliert den 80. Theil des Kaufpreises; wie viel Procent macht sein Verlust?

18) Ein Getreidehändler kauft Getreide, verkauft es nach 7 Monaten wieder und gewinnt den 60. Theil des Kaufpreises; wie viel Procent beträgt der Gewinn?

19) Ein Händler kauft eine Waare, verkauft sie nach 5 Monten wieder und gewinnt den 40. Theil des Kaufpreises; auf wie viel Procent berechnet sich der Gewinn?

20) Von einer Waarensendung beträgt das Bruttogewicht 625 Kg und das Nettogewicht 550 Kg; wie viel Procent macht das Taragewicht?

21) Eine Waarensendung hat 460 Kg Netto- und 500 Kg Bruttogewicht; zu wie viel Procent berechnet sich das Taragewicht?

22) Jemand bezieht Waare von 320 Kg Bruttogewicht mit 64 Kg Emballage; wie viel Procent beträgt das Taragewicht?

23) Jemand hat eine Schuld von 690 M. erst nach 1 Jahre 4 Monaten zu bezahlen; wenn er aber sogleich baar bezahlt, so hat er nur 644 M. zu entrichten; wie viel Procent Rabatt sind ihm gewährt?

24) Eine Schuld von 840 M., welche erst nach 2 Jahren 1 Monate zu tilgen ist, kann durch Baarzahlung von 760 M. gelöscht werden; wie viel Proc. Rabatt trifft es?

25) Ein Wechsel von 960 M. wurde 7 Monate vor der

Verfallzeit um 904 M. verkauft; wie viel Procent Disconto gab der Verkäufer?

26) Jemand wechselte bei einem Geldwechsler ausländische ungangbare Münzen, im Werthe von 450 M., gegen inländische gangbare um und erhielt nur 441 M.; wie viel Procent Agio mußte er bezahlen?

27) Ein Oesterreicher wollte England bereisen und wechselte in England österreichische Banknoten um, im Werthe von 950 M., dafür erhielt er englisches Geld, im Werthe von 893 M.; wie viel Procent Agio hatte er zu entrichten?

28) Ein Italiener wechselte 340 Lire in Papiergeld gegen 323 Lire in Gold um; auf wie viel Procent belief sich das Agio?

Vierter Abschnitt.

Theilungs- und insbesondere Gesellschafts-Rechnungen.

§ 105.

Eine in lauter gleiche Theile zu theilende Zahl wird einfach durch die Anzahl der Theile dividirt. Hat man aber eine Zahl in mehrere ungleiche Theile zu theilen, welche sich so zu einander verhalten wie gewisse gegebene Zahlen, Verhältnißzahlen genannt: so geschieht dies durch Proportionen und zwar durch so viele, als Theile gemacht werden sollen. Es muß dann jeder Theil zu dem Ganzen in dasselbe Verhältniß treten wie die treffende Verhältnißzahl zur Summe aller Verhältnißzahlen. Die Summe der Verhältnißzahlen bildet mit jeder einzelnen Verhältnißzahl das erste fallende Verhältniß und das zu theilende Ganze mit dem fraglichen Theile das zweite. Nach dieser Ordnung lautet die Regel zum Ansatze der Proportion folgendermaßen:

Die Summe aller Verhältnißzahlen verhält sich zu einer Verhältnißzahl wie die zu theilende Zahl zu dem entsprechenden Theile x.

A. Theilungs-Rechnungen.

§ 106.

Beispiel. Die Zahl 207 soll in 3 Theile getheilt werden, welche sich so zu einander verhalten wie 4, 9 und 10.

Verhältnißzahlen.	Theile.
4	36
9	81
10	90
Summe 23	207

Auflösung.

I. 23 : 4 = 207 : x   x = 36.

II. 23 : 9 = 207 : x   x = 81.

III. 23 : 10 = 207 : x   x = 90.

§ 107.

Uebungs-Aufgaben.

1) Die Zahl 20 soll in zwei Theile getheilt werden, welche sich zu einander verhalten wie 1 zu 4; welches sind die Theile?

2) 147 soll in zwei Theile getheilt werden, welche sich zu einander verhalten wie 3 zu 4; welches sind die Theile?

3) 365 ist in zwei Theile zu theilen, welche sich zu einander verhalten wie 2 zu 3; welche Theile sind es?

4) Man theile 237 in zwei Theile, welche sich zu einander verhalten wie 3 zu 7; welches sind die Theile?

5) Zwei Personen haben 450 M. unter sich so zu theilen, daß A so oft 4 M. erhält als B 5 M.; wie viel trifft jedem?

6) Jemand will gelegentlich 369 M. an zwei arme Verwandte so vertheilen, daß der eine so oft $\frac{2}{5}$ M. erhält als der andere $\frac{5}{8}$ M.; wie viel trifft jedem?

7) Die Zahl 486 soll in zwei Theile getheilt werden, von welchen der eine 4 mal so groß ist als der andere; wie groß ist jeder Theil?

8) 678 ist in zwei Theile zu theilen, deren einer 6 mal so groß ist als der andere; welche Theile sind es?

9) Die Zahl 540 soll in drei Theile getheilt werden, welche sich zu einander verhalten wie 2, 3 und 4; welches sind die Theile?

10) Drei Personen haben 427 M. unter sich so zu theilen, daß A so oft 3 M. und B so oft 5 M. erhält als C 6 M.; wie viel trifft jedem?

11) Drei Personen treten eine Erbschaft an, nach dem Testamente sollen sie 932 M. so vertheilt erhalten, daß es dem A so oft $\frac{7}{8}$ M. und dem B so oft $\frac{2}{5}$ M. trifft als dem C $\frac{2}{3}$ M.; wie viel erbt jeder?

12) Die Zahl 804 soll in drei solche Theile zerlegt werden, daß der erste Theil 5 mal und der zweite 3 mal so groß ist als der dritte Theil; wie groß ist jeder Theil?

13) 1890 M. wurden von drei Personen zu einem gemeinsamen Unternehmen aufgebracht; hiezu gab A doppelt so viel als B, C halb so viel als A und B zusammen. Wie viel leistete jeder?

14) Die Zahl 580 soll in 4 Theile getheilt werden, welche sich zu einander verhalten wie 2, 3, 4 und 5; welches sind die Theile?

15) 267 M. sollen unter vier Arme so vertheilt werden, daß, während A $1\frac{2}{3}$ M. erhält, immer B $\frac{5}{6}$ M., C $\frac{3}{4}$ M. und D $1\frac{1}{5}$ M. erhalten; wie viel trifft jedem?

16) Ein Bauer kauft vier Aecker zusammen um 2320 M.; der erste kostet $2\frac{1}{2}$ mal so viel als der zweite, der dritte $1\frac{1}{3}$ mal so viel als der zweite, der vierte den 3. Theil von dem, was die ersten drei zusammen kosten. Wie theuer kommt jeder Acker zu stehen?

17) Die Zahl der Schüler in den vier Klassen eines Gymnasiums beträgt im Ganzen 301. In der ersten Klasse sind $1\frac{3}{4}$ mal so viele Schüler als in der vierten, in der dritten $\frac{2}{5}$ von der Summe der Schüler in der ersten und vierten, in der zweiten 3 mal weniger als die doppelte Schülerzahl der ersten. Wie viele Schüler zählt jede Klasse?

18) Die Zahl 624 soll in fünf Theile getheilt werden, welche sich zu einander verhalten wie 1, 2, 3, 6 und 18; welches sind die Theile?

19) Fünf Geschwister einigten sich, ihren alten Vater mit einem gemeinsamen Geschenke, im Werthe von 133 M., an seinem Geburtstage zu erfreuen, jeder leistete seinen Beitrag nach Maßgabe seiner finanziellen Kräfte; so oft daher A 1 M. gab, gaben B 1,20 M., C 1,30 M., D 1.50 M. und E 2 M. Wie groß war der Beitrag eines jeden?

20) Fünf Fäßchen von verschiedener Größe sind mit Bier gefüllt und fassen zusammen 3 Hl 81 l. Das erste Fäßchen enthält $1\frac{1}{3}$ mal so viel als das zweite, das zweite $\frac{5}{6}$ vom dritten, das vierte halb so viel als die ersten drei zusammen, das fünfte $2\frac{2}{9}$ mal weniger als die ersten zwei zusammen. Wie viele Liter Bier sind in jedem Fäßchen?

B. Gesellschafts-Rechnungen.

§ 108.

Eine Gesellschafts-Rechnung ist nichts anderes als eine Theilungs-Rechnung (§ 106), bei welcher mehrere Personen als

eine Gesellschaft sich zu einem gemeinsamen Unternehmen unter Zusammenlegung von Geldsummen vereinigt haben und den aus dem Geschäfts-Betriebe sich ergebenden Gewinn oder Verlust nach dem Verhältnisse ihrer eingelegten Kapitalien, der Zeiten und Zinsfuße unter sich theilen. Oft handelt es sich auch um die verhältnißmäßige Vertheilung der gemeinsamen Kosten zur Beseitigung einer unproduktiven Last oder eines Mißstandes (Kriegscontribution, Flußufer-Correction rc.).

Man unterscheidet einfache Gesellschafts-Rechnungen, wenn bei jeder Person nur 1 Verhältnißzahl in Betracht kommt; und zusammengesetzte, wenn bei jeder Person zwei oder mehrere Verhältnißzahlen zu berücksichtigen sind.

a. Einfache Gesellschaftsrechnungen.

§ 109.

Beispiel.

Zum Betriebe eines Geschäftes haben drei Personen sich vereinigt; hiezu gab A 1900 M., B 2000 M. und C 2500 M. Nach anderthalb Jahren theilten sie den Gewinn von 720 M.; wie viel Gewinn erhielt jeder?

Auflösung.

Verhältnißzahlen.	Gewinnantheile.
A 1900	$213\frac{3}{4}$ M.
B 2000	225 „
C 2500	$281\frac{1}{4}$ „
6400	720 M.

A. $6400 : 1900 = 720 : x \quad x = 213\frac{3}{4}$ M.

B. $6400 : 2000 = 720 : x \quad x = 225$ „

C. $6400 : 2500 = 720 : x \quad x = 281\frac{1}{4}$ „

§ 110.

Uebungs-Aufgaben.

1) Zwei Personen betreiben ein Geschäft gemeinsam, dazu gab A 1800 M. und B 2100 M. her. Nach einem Jahre zeigte sich ein Gewinn von 520 M.; wie viel trifft hievon einem jeden?

2) Zum Betriebe eines gemeinsamen Geschäftes legen zwei Personen Geld zusammen: A gibt 2200 M. und B 3400 M. her. Nach 2 Jahren theilen sie den Gewinn von 840 M.; wie viel erhält jeder?

3) Zwei Kapitalisten betreiben gemeinsam ein Geschäft, wozu

A 1600 M. und B 2800 M. einlegte. Nach 3 Jahren stellte sich ein Verlust von 209 M. heraus; wie viel hat jeder an diesem Verluste zu erleiden?

4) An einem Geschäfte sind drei Personen betheiligt: A mit 3200 M., B mit 1200 M. und C mit 2400 M. Nach einiger Zeit ergab sich ein Gewinn von 510 M., welchen die Aktionäre unter sich theilten; wie viel traf jedem?

5) Drei Gemeinden haben eine Kriegs-Contribution von 12000 M. aufzubringen, die Leistung einer jeden Gemeinde richtet sich nach dem Steuer-Verhältnisse. Die Gemeinde A zahlt 570 M. jährlicher Steuern, B 450 M. und C 480 M.; welchen Beitrag hat jede Gemeinde zur Contribution zu liefern?

6) Ein Brücken-Bau wurde von drei Unternehmern gemeinsam bewerkstelligt; hiezu schoß A 1200 M., B 1500 M. und C 2100 M. Zur Deckung dieser Ausgaben wird ein Brücken-Zoll erhoben und um 380 M. jährlich in Pacht gegeben. Wie viel bezieht jeder Unternehmer von diesem Pachte?

7) Ein Kaufmann hat vier Gläubiger: dem A schuldet er 2400 M., dem B 3600 M., dem C 4000 M. und dem D 6500 M. Er stellt seine Zahlungen ein und überläßt seinen Gläubigern 5280 M. als Rest seines Vermögens. Wie viel erhält jeder Gläubiger und wie viel verliert jeder?

8) Zu einem gemeinsamen Unternehmen legten 4 Personen Geld zusammen. Die Einlagsumme des A betrug 15000 M., die des B 18000 M., des C 10000 und des D 9000 M. Nach einiger Zeit vertheilten sie den Gewinn von 2600 M.; wie viel kam auf jeden?

9) Das Anlage-Kapital von 4 Theilnehmern eines Bankgeschäftes beträgt 132000 M. Von dem zur Vertheilung gekommenen Reingewinne erhielt A 1000 M., B 2000 M., C 1200 M. und D 2400 M. Wie groß ist die Einlagsumme eines jeden?

10) An einem industriellen Etablissement sind fünf Kompagnone betheiligt: A mit 6000 M., B mit 9000 M., C mit 10000 M., D mit 12000 M. und E mit 20000 M. Welchen Antheil hat jeder an dem Reingewinne von 2850 M.?

11) Eine Compagnie von fünf Mitgliedern betreibt ein Fabrikgeschäft mit einem Anlage-Kapitale von 476000 M. Zur

Zeit, als der Gewinn vertheilt werden sollte, ergab sich ein Verlust, so daß A 1000 M., B 1200 M., C 1400 M., D 1900 M. und E 3000 M. Verlust zu erleiden hatte. Welchen Beitrag hatte jeder zum Anlage-Kapitale geleistet?

12) Eine Flußufercorrektion, welche auf Kosten von sechs Flur-Adjacenten vorgenommen wurde, kostete 3900 M. Die Kosten vertheilten sich nach Verhältniß der Länge des Flußtheiles, welcher an die Flur eines jeden Besitzers stößt. Diese Längen sind: für A 20 Meter, für B 35 m, für C 12 m, für D 45 m, für E 96 m und für F 52 m. Welche Kosten hatte jeder?

b. Zusammengesetzte Gesellschafts-Rechnungen.

§ 111.

Bei den zusammengesetzten Gesellschafts-Rechnungen wirken für jede Person zwei oder mehrere Verhältnißzahlen bestimmend auf die Größe des Antheiles. Alle Verhältnißzahlen einer Person sind durch Multiplication zu einer einzigen zusammengesetzten Verhältnißzahl zu verbinden und als solche in die Proportion zu setzen.

Beispiel.

Drei Personen legten zum Betriebe eines gemeinsamen Unternehmens Geldsummen zusammen. A gab 6000 M. auf 5 Jahre zu 6 Proc., B 2000 M. auf 3 Jahre zu 5 Proc., C 1200 M. auf 2 Jahre zu $4\frac{1}{2}$ Proc.; denn es wurde der von A aufgestellte Grundsatz: „Je mehr Jahre Einer sein Kapital dem Geschäfte leiht, desto mehr Procente soll er bekommen", von B und C acceptirt. Ferner wurde vereinbart, es solle auch der überschüssige Gewinn nach obigen Verhältnißzahlen vertheilt werden. Nach 1 Jahre ergab sich ein solcher Gewinn von 1104 M.; wie viel traf hievon auf jeden?

Auflösung.

	Zusammengesetzte Verhältnißzahlen.	Gewinnantheile.
A $6000 \times 5 \times 6$	= 180000	900 M.
B $2000 \times 3 \times 5$	= 30000	150 „
C $1200 \times 2 \times 4\frac{1}{2}$	= 10800	54 „
	220800	1104 M.

A $220800 : 180000 = 1104 : x \qquad x = 900$ M.

B $220800 : 30000 = 1104 : x \qquad x = 150$ M.

C $220800 : 10800 = 1104 : x \qquad x = 54$ M.

Daß die drei Verhältnißzahlen für eine Person mit einander multiplicirt werden müssen, läßt sich aus folgender Erörterung ersehen:

Geht man von der Einheit aus, so trifft es bei A für 1 M. der Einlagsumme auf 1 Jahr zu 1% einen gewissen Gewinn-Antheil, folglich für 6000 M. Einlage 6000mal so viel als für 1 M.; auf 5 Jahre ist der Gewinn-Antheil für die 6000 M. 5mal größer als für 1 Jahr, somit 6000 $\times$ 5. Ferner trifft es zu 6% für 6000 M. auf 5 Jahre einen 6mal größeren Gewinnantheil als zu 1%, daher 6000 $\times$ 5 $\times$ 6 = 180000, wie oben in der Auflösung bei A.

§ 112.

Werden bei einem gemeinsamen Unternehmen Kapitalien zu verschiedenen Zeiten von den Theilnehmern bald hinzugegeben, bald zurückgenommen, so bilden die einem Theilnehmer zugehörigen Verhältnißzahlen ein Aggregat von Produkten aus je einem Kapitale und der treffenden Zeit. Die eingelegten Kapitalien sind positiv und die zurückgenommenen negativ zu nehmen. Als Zeit ist für jedes Kapital diejenige vom Augenblicke der Einlage oder Zurücknahme des Kapitals bis zum Abschlusse der Rechnung oder bis zur Beendigung des Geschäftes in Rechnung zu bringen. Das Resultat eines berechneten Aggregates gibt eine einzige zusammengesetzte Verhältnißzahl, die dann in die Proportion eingesetzt wird.

Beispiel.

Zwei Kaufleute schießen zu einem gemeinsamen Unternehmen Geldsummen zusammen.

A gibt 6000 M sogleich und 2100 M. nach 8 Monaten her, nimmt aber 2 Monate nach der zweiten Einlage schon wieder 3000 M. zu einem anderen Zwecke zurück, schießt 5 Monate darnach 1200 Mark hinzu und nimmt 3 Monate vor Beendigung des Geschäftes 800 Mark zurück.

B legt sogleich 8000 M. ein, nimmt aber 6 Monate später 1600 M. zurück, legt 3 Monate darnach wieder 2400 M. ein und nimmt 4 Monate vor der Beendigung des Geschäftes 1800 M. zurück.

Das Geschäft dauerte drei Jahre, wornach der Reingewinn von 2586 M. zur Vertheilung kam; wie viel traf es jedem?

Auflösung.

	Zusammengesetzte Verhältniß-Zahlen.	Gewinn-Antheile.
A $6000 \times 3 + 2100 \times 2\frac{1}{3} - 3000 \times 2\frac{1}{6} + 1200 \times 1\frac{3}{4} - 800 \times \frac{1}{4} =$	18300	1098 M.
B $8000 \times 3 - 1600 \times 2\frac{1}{2} + 2400 \times 2\frac{1}{4} - 1800 \times \frac{1}{3} =$	24800	1488 M.
	43100	2586 M.

Berechnung der beiden Aggregate (siehe § 49 und 50).

A 18000	— 6000		B 24000	— 3200
4200	— 500		4800	— 800
700	— 200		600	— 600
1200	— 6700		+ 29400	— 4600
900			— 4600	
+ 25000			24800	
— 6700				
18300				

$$A\ 43100 : 18300 = 2586 : x$$
$$x = 1098 \text{ M.}$$
$$B\ 43100 : 24800 = 2586 : x$$
$$x = 1488 \text{ M.}$$

§ 113.

Uebungs-Aufgaben.

1) Drei Personen traten zu einem gemeinsamen Unternehmen zusammen. Hiezu legte A 16000 M. auf 3 Jahre ein, B. 24000 M. auf 8 Jahre, C 15000 M. auf 4 Jahre. Der Gewinn wurde jährlich vertheilt, nach dem ersten Jahre ergaben sich 3600 M. Gewinn; welcher Gewinnantheil kam auf jeden Theilnehmer?

2) Einem Oekonomen standen zur Bestellung seiner Felder 4 Arbeiter in der Weise zu Gebote, daß der erste 5 Wochen, jede Woche nur 4 Tage und jeden Tag nur 8 Stunden bei ihm arbeitete; der zweite 6 Wochen, je 5 Tage und je 7 Stunden; der dritte 4 Wochen, je 6 Tage und je 10 Stunden; der vierte 3 Wochen, je 4 Tage und je 10 Stunden. Der Gesammtlohn betrug 219 M.; wie viel Lohn kam auf jeden Arbeiter?

3) Ein Fabrikbesitzer erwarb sich noch drei Theilnehmer zu seinem Geschäftsbetriebe. Dem A, welcher 8000 M. auf 3 Jahre herlieh, versprach er 5%, dem B. mit 12000 M. auf 4 Jahre 6%, dem C mit 15000 M. auf 9 Jahre 8%, für sich selbst beanspruchte

er (F) mit 30000 M. auf 9 Jahre 10%. Außerdem wurde vereinbart, daß eine Dividende nach obigen Verhältnißzahlen vertheilt werden solle. Nach dem ersten Jahre ergab sich eine Dividende von 3141 M.; wie viel erhielt jeder davon?

4) Ein Dienstherr vertheilte aus Anlaß seiner silbernen Hochzeit an seine 5 Dienstboten 200 M., jedoch nicht gleichmäßig, sondern nach dem Verhältnisse ihres Alters, ihrer bei ihm zugebrachten Dienstjahre und der Zahl ihrer von ihm im letzten Jahre erhaltenen Belobungen.

A	war	47	J.	alt,	diente	5	J.	dem	Jubilar	und	erhielt	6 Belob.
B	„	30	„	„	„	4	„	„	„	„	„	2 „
C	„	45	„	„	„	8	„	„	„	„	„	5 „
D	„	50	„	„	„	12	„	„	„	„	„	4 „
E	„	25	„	„	„	2	„	„	„	„	„	3 „

Welchen Antheil erhielt jeder?

5) Sechs Dörfer erhielten zur Kriegszeit Militär-Einquartirung. Das Dorf A erhielt 56 Mann auf 4 Tage, B 100 Mann auf 2 Tage, C 120 Mann auf 5 Tage, D 95 Mann auf 8 Tage, E 112 Mann auf 3 Tage und F 240 Mann auf 1 Tag. Als Verpflegsentschädigung bezogen alle 6 Dörfer zusammen 2065 M.; wie viel traf es jedem Dorfe?

6) Dem Rektor eines Gymnasiums wurden von einem Wohlthäter 210 M. zur Vertheilung an die fünf ärmsten und würdigsten Absolventen mit der Bestimmung übergeben, daß die Vertheilung nach Maßgabe ihres Alters und nach dem umgekehrten*) Verhältnisse ihrer erworbenen Plätze und Sittensnoten geschehe.

A	zählte	18	J.,	erwarb sich den	4.	Platz u. die	2. Sittensnote.
B	„	19	„		6.	„	1. „
C	„	22	„		3.	„	1. „
D	„	21	„		12.	„	3. „
E	„	20	„		15.	„	2. „

Wie viel bekam jeder Absolvent?

7) Sechs Beamte machten ihrem Vorstande zu seinem 25jährigen Dienstjubiläum einen silbernen Pokal, im Werthe von 224 M., zum Geschenke. Der von einem derselben gemachte Vor-

*) Beim umgekehrten Verhältnisse ist der reciproke Werth, d. h. $\frac{1}{4}$ statt 4 und $\frac{1}{2}$ statt 2 zu nehmen (so bei A).

schlag, jeder solle nach Maßgabe seines Gehaltes und Vermögens seinen Beitrag liefern, wurde angenommen.

Als Gehalt hatte A 2000 M., B 1500 M., C 1200 M., D 1200 M., E 1000 M. und F 900 M. Deren Vermögen stand, der Ordnung nach genommen, im Verhältnisse von 1, 3, 2, 8, 5 und 5. Wie viel hatte jeder beizusteuern?

8) Zwei Personen legen zum Betriebe eines gemeinsamen Geschäftes Geldsummen zusammen.

A gibt zuerst 2000 M. und nach 8 Monaten noch 600 M. her, nimmt aber 4 Monate nach der zweiten Einlage wieder 1000 Mark zurück.

B gibt Anfangs 3000 M. her, nimmt aber schon nach 9 Monaten wieder 1600 M. zurück, schießt jedoch 1 Monat nach dieser Zurücknahme wieder 600 M. hinzu.

Nach zweijährigem Betriebe des Geschäftes vertheilen sie den Gewinn von 800 M.; wie viel trifft jeder Person?

9) A, B und C betrieben 6 Jahre ein Geschäft gemeinsam. Hiezu gab A sogleich 3000 M. her und nach 9 Monaten noch 800 M., nahm aber 1 Jahr 6 Monate darnach wieder 2000 M. zurück.

B gab Anfangs 2500 M. her, nahm aber schon nach 1 Jahre 8 Monaten wieder 1200 M. zurück, schoß jedoch 6 Monate darnach wieder 900 M. hinzu.

C trat mit 2000 M. bei und schoß nach 2 Jahren 4 Monaten noch 600 M. hinzu, nahm aber 10 Monate vor Beendigung des Geschäftes wieder 1800 M. zurück.

Der zu vertheilende Gewinn betrug 3252 M.; wie viel erhielt jeder?

10) Drei Personen einigten sich, ein einträgliches Geschäft gemeinsam zu unternehmen.

Dazu gab A 8000 M., nach 10 Monaten nahm er aber wieder 900 M. zurück, 4 Monate später schoß er wieder 1200 M. hinzu, nach weiteren 4 Monaten nahm er 1000 M. zurück.

B schoß Anfangs 10000 M. und nach 1 Jahre 2 Monaten 1500 M. hinzu, 3 Monate später nahm er 1800 M. und nach weiteren 5 Monaten 900 M. zurück.

C legte zuerst 12000 M. und 9 Monate später 3200 M.

ein, 3 Monate darnach nahm er wieder 2500 M. zurück und 1 Jahr 4 Monate vor Beendigung des Geschäftes schoß er noch 2100 M. hinzu.

Nach 3 Jahren wurde das Geschäft beendigt und der gemeinsame Gewinn von 4630 M. vertheilt; wie viel erhielt jeder?

11) Vier Personen legten behufs eines gemeinsamen Unternehmens Geldsummen zusammen.

A legte Anfangs 7000 M., 7 Monate später 2400 M. und nach weiteren 5 Monaten noch 1750 M. ein, nahm aber 3 Monate vor Beendigung des Geschäftes wieder 3000 M. zurück.

B legte sogleich 8000 M. ein, nahm aber nach 1 Jahre 4000 M. zurück, schoß jedoch 8 Monate vor Beendigung des Geschäftes noch 3000 M. hinzu.

C gab 12000 M. her, nahm aber 6 Monate später wieder 5000 M. und nach weiteren 4 Monaten 1800 M. zurück.

D schoß 6000 M hinzu, nahm 2 Monate später wieder 1200 M. zurück, ersetzte diese wieder 3 Monate darnach und nahm dieselben nach weiteren 4 Monaten wieder zurück. Nach 2 Jahren wurde der gemeinsame Gewinn von 3420 M. vertheilt; wie groß war der Antheil einer jeden Person?

12) An einem gemeinsamen Geschäfte betheiligten sich fünf Personen.

A unterstützte das Geschäft sogleich mit 5000 M. und 1 Monat später noch mit 2400 M., nahm aber nach weiteren 9 Monaten 2700 M. zurück.

B betheiligte sich Anfangs mit 4000 M., nahm aber 3 Monate später wieder 1000 M. und nach weiteren 2 Monaten noch 1800 M. zurück, schoß jedoch 5 Monate darnach noch 2100 M. hinzu.

C gab 9000 M. her, nahm aber 4 Monate später 3000 M. und nach weiteren 6 Monaten 1500 M. wieder zurück.

D legte 3000 M und 9 Monate später noch 4000 M. ein.

E endlich war mit 6050 M. betheiligt.

Nach 1 Jahre wurde die Rechnung abgeschlossen und der gemeinsame Gewinn von 3240 Mark vertheilt; wie viel kam auf jeden?

Fünfter Abschnitt.

Mischungs- und insbesondere Alligations-Rechnungen.

§ 114.

Die Mischungs-Rechnungen sind von doppelter Art: entweder will man die durch Mischung mehrerer Waarensorten erzeugte Qualität oder vielmehr den Werth oder Preis für die Maßeinheit der Mischung berechnen, wenn die Preise und Quantitäten der einzelnen zu mischenden Waarensorten gegeben sind (Durchschnitts-Rechnung); oder umgekehrt, es wird eine gewisse durch Mischung zu erzeugende Qualität oder vielmehr ein bestimmter Preis für die Maßeinheit der Mischung verlangt und es fragt sich dann, wie viel von jeder Sorte zu nehmen ist, um gerade die Mischungs-Qualität von dem gewünschten Preise zu erzielen, vorausgesetzt, daß der Preis jeder einzelnen Sorte bekannt ist (Alligationsrechnung).

Die erste Art der Mischungs-Rechnungen begreift bloß die Berechnung des arithmetischen Mittels der Preise oder des Durchschnitts-Werthes von mehreren Waarensorten, wie sie schon bei den arithmetischen Proportionen [§ 82, 6) und § 84, 4)] vorkam. Doch sollen des Zusammenhanges wegen und zur besseren Unterscheidung der ersten von der zweiten Art hier noch ein Beispiel und später einige Uebungs-Aufgaben folgen.

Beispiel.

Ein Weinwirth mischt viererlei Weinsorten und Wasser. Von der ersten Sorte nimmt er 75 Liter, das Liter zu 1,80 M., von der zweiten Sorte 80 L., à 1,50 M., von der dritten 100 L., à 1,20 M., von der vierten 85 L., à 1 M., und vom Wasser 60 L. Welchen Werth oder Preis erhält das Liter von dieser Mischung?

Auflösung.

Die Preise aller Sorten zusammen betragen soviel wie der Preis der ganzen Mischung. So viele Liter nun die ganze Mischung sammt dem Wasser enthält, den eben sovielten Theil vom Preise der ganzen Mischung trifft es auf 1 Liter der Mischung. Somit hat man, um den Preis (Durchschnittspreis) für 1 Liter der Mischung zu erhalten, den Gesammtpreis durch die Gesammtliter-Anzahl der Mischung zu dividiren. Als Preis für das Wasser ist in der Rechnung Null zu setzen.

	Preise.		Liter.		Preise.
Erste Sorte:	1,80	×	75	=	135 M.
zweite „	1,50	×	80	=	120 „
dritte „	1,20	×	100	=	120 „
vierte „	1	×	85	=	85 „
Wasser	0	×	60	=	0 „
			400		460 M.

400 Liter kosten 460 M., daher 460 : 400 = $1\frac{60}{400}$ = $1\frac{3}{20}$ = 1,15 M. als Preis für 1 Liter der Mischung.

§ 115.

Die zweite Art der Mischungsrechnungen ist die hier zu behandelnde Alligations-Rechnung. Bei dieser werden Verhältnißzahlen bestimmt, welche angeben, wie viel von einer jeden der zu mischenden Waarensorten von gegebenen Preisen in die Mischung zu nehmen ist, um gerade die Qualität von einem verlangten Werthe oder Preise zu erhalten; es fragt sich nun, wie diese Verhältnißzahlen gefunden werden.

Man unterscheidet einen Mischungs-, Mehr- und Minderwerth. Der Mischungswerth ist der Preis für die Maßeinheit der Mischung. Mehrwerth oder Minderwerth nennt man den Preis jeder einzelnen Waarensorte, je nachdem er mehr oder weniger beträgt als der Mischungswerth bei einerlei Maß.

Beim Aufsuchen der Verhältnißzahlen hat man darauf zu achten, daß die Mehrwerthe durch die Minderwerthe ausgeglichen werden, d. h. zu der Mischung hat man von jeder Sorte nur so viel zu nehmen, daß der Kosten-Unterschied zwischen den besseren Sorten uud der Mischungs-Qualität derselbe ist wie zwischen den schlechteren Sorten und der Mischungs Qualität, da ja die verlangte Mischungs-Qualität den Durchschnittswerth der einzelnen Sorten haben soll. Dieses Ziel wird dadurch erreicht, daß man je einen Mehr- und Minderwerth paarweise nimmt und die Differenz zwischen dem Mehr- und Mischungswerthe zu dem Minderwerthe als Verhältnißzahl, sowie die Differenz zwischen dem Minder- und Mischungswerthe zu dem Mehrwerthe als Verhältnißzahl setzt; denn nimmt man den Preis-Unterschied zwischen dem Mehr- und Mischungswerthe, sowie den zwischen dem Minder- und Mischungswerthe so oft als die zugehörige Verhältnißzahl angibt, so erhält man zwei neue Preisunterschiede, welche einander gleich sind.

1) Es seien in einer Aufgabe nur 1 Mehr- und 1 Minderwerth gegeben.

Beispiel.

Jemand hat zweierlei Weine: von der ersten Sorte kostet das Liter 1 M. 20 Pf. und von der zweiten 90 Pf. Er will aus beiden Sorten eine Mischung erzeugen, von welcher das Liter genau 1 M. werth ist; in welchem Verhältnisse muß er mischen?

Auflösung.

Mehrwerth	120	10 Verhältnißzahl	120 — 100 = 20
Mischungswerth	100		
Minderwerth	90	20 Verhältnißzahl	100 — 90 = 10

Die gefundenen Verhältnißzahlen 10 und 20 sagen nun, man solle von der besseren Sorte so oft 10 Liter nehmen, als von der schlechteren 20 Liter genommen werden.

Die Verhältnißzahlen können vereinfacht werden, wenn man sie durch ihre gemeinsamen Faktoren dividirt. So erhält man dann aus den Verhältnißzahlen 10 und 20 die einfacheren 1 und 2, welche nun sagen, man solle von der besseren Sorte so oft 1 Liter nehmen, als von der schlechteren 2 Liter genommen werden.

2) Hat man in einer Aufgabe nur 1 Mehrwerth und mehrere Minderwerthe, so läßt sich die Mischungsqualität schon allein aus jedem Minderwerthe und demselben Mehrwerthe nach dem vorigen Beispiele herstellen, und erhält man dann die gleiche*) Qualität der Mischung so oft, als Minderwerthe vorhanden sind. Ist dies geschehen, so denke man sich alle diese erhaltenen Mischungen von gleicher Qualität zusammen geschüttet, und man hat wieder eine Mischung von derselben Qualität wie vorher, in welcher aber jetzt alle Sorten enthalten sind, wie es die Aufgabe verlangt. Faßt man nun alle gebrauchten Verhältnißzahlen ins Auge, so zeigt sich für jeden Minderwerth eine Verhältnißzahl und zwar immer die gleiche; für den Mehrwerth aber findet sich eine Summe von so vielen verschiedenen Verhältnißzahlen, als es Minderwerthe sind. Alle Verhältnißzahlen des Mehrwerthes werden durch Addition zu einer einzigen Verhältnißzahl vereinigt, wie es bei der Mischung in Natura vorkommt.

---

*) „Gleiche Qualität" ist hier im Sinne von „Qualität von gleichem Werthe oder Preise" aufzufassen; denn der Geschmack solcher durch Mischung, z. B. von Weinsorten, erzeugten gleichen Qualitäten kann verschieden sein.

Sind umgekehrt in einer Aufgabe mehrere Mehrwerthe und nur 1 Minderwerth, so ist das Verfahren ein ähnliches.

Aus lauter Mehrwerthen oder aus lauter Minderwerthen ließe sich die verlangte Qualität der Mischung selbstverständlich nicht herstellen.

Beispiel.

Ein Weinwirth will aus viererlei Wein und Wasser durch Mischung eine Qualität erzeugen, von welcher das Liter 1,50 M. werth ist. Die erste Sorte kostet 2 M., die zweite 1,40 M., die dritte 1,20 M., die vierte 1,10 M. In welchem Verhältnisse hat er zu mischen?

Auflösung.

a.

1. Sorte 200		10
	150	
2. Sorte 140		50

b.

1. Sorte 200		30
	150	
3. Sorte 120		50

c.

1. Sorte 200		40
	150	
4. Sorte 110		50

d.

1. Sorte 200		150
	150	
Wasser 0		50

Die verlangte Qualität der Mischung erhält man:

a. schon allein aus der 1. und 2. Sorte, wenn man von der ersten so oft 10 Liter als von der zweiten 50 Liter nimmt; oder nach vereinfachten Verhältnißzahlen: wenn man von der ersten Sorte so oft 1 Liter als von der zweiten 5 Liter nimmt.

b. Auch allein aus der 1. und 3. Sorte, wenn man zu je 30 Liter der ersten Sorte 50 Liter der dritten nimmt.

c. Ebenso allein aus der 1. und 4. Sorte, wenn man im Verhältnisse von 40 und 50 mischt.

d. Endlich allein aus der 1. Sorte und Wasser, wenn man immer 50 Liter Wasser zu je 150 Liter Wein, oder 1 Liter Wasser zu je 3 Liter Wein gießt.

Gießt man die 4 Mischungen von gleicher Qualität unter a, b, c und d zusammen: so erhält man wieder eine Mischung von derselben Qualität, welche von der zweiten, dritten und vierten Sorte, sowie vom Wasser je 50 Liter und von der ersten Sorte 10, 30, 40 und 150 Liter, zusammen 230 Liter, enthält, wenn man jede dieser Quantitäten nur einmal nimmt. Nach den ver-

einfachten Verhältnißzahlen sind von der zweiten, dritten und vierten Sorte, sowie vom Wasser je 5 Liter und von der ersten Sorte 1, 3, 4 und 15 Liter, zusammen 23 Liter, in der Mischung, wenn man diese Quantitäten wieder nur einmal genommen denkt.

Bei mehrfach genommenen Quantitäten wird selbstverständlich auch das Mischungsquantum ein mehrfaches.

Ebenso kann man auch die obigen 4 Special-Rechnungen unter a, b, c und d zu einer einzigen Total-Rechnung zusammensetzen unter folgender Form:

	Preise.		Verhältnißzahlen.	Vereinfachte Verhältnißzahlen.
erste Sorte	200		10 + 30 + 40 + 150 = 230	23
		150		
zweite „	140		50	5
dritte „	120		50	5
vierte „	110		50	5
Wasser	0		50	5

3) Bei einer Aufgabe von mehreren Minder- und ebenso vielen Mehrwerthen nimmt man paarweise je einen beliebigen Mehr- und Minderwerth und sucht die Verhältnißzahlen, indem man die Differenz zwischen dem Mehr- und Mischungswerthe als Verhältnißzahl zum zugehörigen Minderwerthe schreibt, sowie die Differenz zwischen dem Minder- und Mischungswerthe als Verhältnißzahl zum zugehörigen Mehrwerthe setzt. Es ist nicht nöthig, für jedes Paar Mehr- und Minderwerth eine gesonderte Rechnung zu schreiben, sondern man setzt einfacher alle Special-Rechnungen, wie oben bei 2), zu einer einzigen Total-Rechnung zusammen.

Beispiel.

Ein Weinwirth mischt dreierlei Sorten Wein und Wasser, um eine Mischungsqualität hervorzubringen, von welcher das Liter 1,80 M. werth ist. Die erste Sorte kostet 2,20 M., die zweite 1,90 M., die dritte 1,20 M. Nach welchen Verhältnißzahlen hat er zu mischen?

Auflösung.

	Preise.		Verhältniß-Zahlen.	Vereinfachte Verhältnißzahlen.
Erste Sorte	220		180	18
zweite „	190		60	6
		180		
dritte „	120		10	1
Wasser	0		40	4

Behufs Auffindung der Verhältnißzahlen wurden hier paarweise die erste Sorte und Wasser, sowie die zweite und dritte Sorte zusammengenommen gedacht.

Statt dessen kann man die Weinsorten und Wasser noch anders paarweise zusammen nehmen, nämlich die erste und dritte Sorte, sowie die zweite und Wasser, was eine zweite Auflösung gibt, da die Mischungsqualität dieselbe wird.

4) Sind in einer Aufgabe nicht gleich viel Mehr- und Minderwerthe, so hat man wieder, wie in der vorigen Aufgabe, paarweise je einen beliebigen Mehr- und Minderwerth zusammen zu nehmen und die Verhältnißzahlen zu suchen. Bezüglich der überschüssigen Mehr- oder Minderwerthe ist wieder paarweise jeder überschüssige Mehrwerth mit einem beliebigen schon gebrauchten Minderwerthe, oder umgekehrt jeder überschüssige Minderwerth mit einem beliebigen schon gebrauchten Mehrwerthe in Zusammenhang zu bringen. Hiedurch erhält jeder öfter als einmal gebrauchte Mehr- oder Minderwerth ebenso viele Verhältniß-Zahlen als Anwendungen. Zwei oder mehrere solche zu einem Werthe gehörigen Verhältnißzahlen müssen stets durch Addition zu einer einzigen Verhältnißzahl verbunden werden.

Beispiel.

Ein Silberarbeiter hat viererlei Silber, nämlich: Feinsilber, 15 löthiges, 12 löthiges und 9 löthiges Silber; er soll daraus ein 13 löthiges Gefäß machen (siehe Anmerk. von § 85). Nach welchen Verhältnißzahlen muß er die Legirung (Mischung) vornehmen, wenn er auch noch Kupfer in die Mischung geben will?

Auflösung.

	Silbergehalt.		Verhältnißzahlen.
Feinsilber	16		1 + 13 = 14
löthig	15		4
		13	
"	12		3
"	9		2
Kupfer	0		3

Hier wurde das Fein- oder 16löthige Silber einmal zu dem 12löthigen und einmal zum Kupfer oder nulllöthigen Silber, sowie 15 löthige das zum 9löthigen genommen. Die erhaltenen Verhältnißzahlen lassen sich nicht vereinfachen.

Es ist leicht einzusehen, daß diese Aufgabe noch mehrere andere paarweise Combinationen der Mehr- und Minderwerthe und somit auch noch mehrere andere Auflösungen zuläßt.

§ 116.

Meistens handelt es sich bei den Alligationsrechnungen nicht allein um die Verhältnißzahlen und die durch diese zu vermittelnde Qualität der Mischung, sondern auch um Quantitäten, zu deren Bestimmung gleichfalls die Verhältnißzahlen dienen.

Bald wird eine bestimmte Quantität der zu erzeugenden Mischung verlangt, wozu man die Quantitäten der einzelnen zu mischenden Sorten bestimmen muß; bald soll eine Sorte in der ganzen vorhandenen Quantität in die Mischung kommen, wobei es sich dann fragt, in welchen Quantitäten die übrigen Sorten in die Mischung gebracht werden. Bezüglich der Quantitäten unterscheidet man also zwei Fälle; in beiden Fällen sind aber immer zuerst die Verhältnißzahlen zu suchen.

1) Im ersten Falle kommt nach Aufsuchung der Verhältnißzahlen die Theilungsrechnung zur Anwendung. Denn das verlangte Mischungsquantum wird dadurch zusammengebracht, daß man es nach den Verhältnißzahlen in diejenigen Theile theilt (nach § 106), aus welchen es zusammengesetzt werden soll; diese Theile bilden dann die Quantitäten der einzelnen zu mischenden Waaren-Sorten.

Beispiel.

Ein Kaufmann will aus dreierlei Kaffee-Sorten durch Mischung eine Qualität hervorbringen, von welcher das Pfd. 1,50 M. werth ist. Von der ersten Sorte kostet das Pfd. 1,70 M., von der zweiten 1,60 M. und von der dritten 1,30 M. Welche Quantität hat er von jeder Sorte zu nehmen, wenn das Mischungsquantum 1 Zentner wiegen soll?

Auflösung.

	Preise.		Verhältnißzahlen.	Vereinfachte Verhältnißzahlen.	Quantitäten.
erste Sorte	170		20	2	$28\frac{4}{7}$ Pfd.
zweite „	160		20	2	$28\frac{4}{7}$ „
		150			
dritte „	130		$20 + 10 = 30$	3	$42\frac{6}{7}$ „
				7	100 Pfd.

Nimmt man gleich die vereinfachten Verhältnißzahlen, so hat man von der ersten und zweiten Sorte so oft je 2 Pfd. zur Mischung zu nehmen, als von der dritten Sorte 3 Pfd. genommen werden.

Damit man gerade 1 Ztr. oder 100 Pfd. als Mischungsquantum erhält, theilt man 100 Pfd. nach den Verhältnißzahlen 2, 2 und 3 in drei Theile nach § 106, wie folgt:

$$7 : 2 = 100 : x \qquad\qquad 7 : 3 = 100 : x$$
$$x = 28\tfrac{4}{7} \text{ ℔.} \qquad\qquad x = 42\tfrac{6}{7} \text{ ℔.}$$

Aus dieser Theilungsrechnung hat sich ergeben, daß man von der ersten und zweiten Sorte je $28\frac{4}{7}$ und von der dritten Sorte $42\frac{6}{7}$ Pfd. zur Mischung nehmen muß, um 100 Pfd. der Mischung zu erhalten.

Der ersten und zweiten Sorte kommen gleiche Verhältnißzahlen, daher auch gleiche Quantitäten zu, weßhalb eine Proportion entbehrlich ist.

2) Im zweiten Falle, in welchem das ganze vorhandene Quantum einer gewissen Sorte in die Mischung kommen soll und die Quantitäten der übrigen Sorten berechnet werden, hat man keine Theilungsrechnung, sondern es werden nach Aufsuchung der Verhältnißzahlen Proportionen angesetzt, in welchen immer das ganze zur Mischung kommende Quantum der einen erwähnten Sorte zu dem fraglichen Quantum einer der übrigen Sorten sich verhält, wie sich die zugehörigen Verhältnißzahlen zu einander verhalten. Die Proportionen können nach folgender kurzen Regel angesetzt werden:

Wie die Verhältnißzahlen, so verhalten sich auch die entsprechenden Quantitäten der Sorten zu einander. Es gibt dann so viele Proportionen, als Quantitäten der Sorten zu berechnen sind.

Beispiel.

Ein Bettfedern-Händler hat viererlei Sorten Bettfedern. Von der ersten Sorte kostet das Pfund 4 M., von der zweiten 3,53 M., von der dritten 2,60 M., von der vierten 2,47 M. Er will durch Mischung derselben eine neue Sorte herstellen, von welcher das Pfd. 3 M. werth ist. Von der ersten Sorte hat er 20 Pfd., er möchte dieses ganze Quantum in die Mischung bringen. Welche

Quantitäten muß er von den übrigen drei Sorten zur Mischung nehmen?

Auflösung.

	Preise.	Verhältnißzahlen.	Quantitäten.
Erste Sorte	400	40	20 Pfd.
zweite „	353	53	26½ „
	300		
dritte „	260	100	50 „
vierte „	247	53	26½ „

Nach diesen gefundenen Verhältnißzahlen muß er immer von der ersten Sorte 40 und von der dritten 100 Gewichtstheile, z. B. Gramm, nehmen, während er von der zweiten und vierten Sorte je 53 Gramm nimmt.

Die Quantitäten der zweiten, dritten und vierten Sorte werden nun mittels Proportionen gefunden, welche nach obiger Regel angesetzt werden; demnach erhält man nachstehende Proportionen:

Zweite Sorte.	Dritte Sorte	Vierte Sorte.
40 : 53 = 20 : x	40 : 100 = 20 : x	wie bei der
x = 26½ Pfd.	x = 50 Pfd.	zweiten Sorte.

Den gleichen Verhältnißzahlen der zweiten und vierten Sorte entsprechen auch gleiche Quantitäten, daher ist die Proportion der vierten Sorte entbehrlich.

Da von der ersten Sorte alle 20 Pfd. zur Mischung kommen sollen, so müssen von der zweiten und vierten je 26½ Pfd. und von der dritten 50 Pfd. genommen werden.

3) Um die Probe für eine Alligations-Rechnung zu machen, hat man das arithmetische Mittel der Preise oder den Durchschnitts-Werth der einzelnen Sorten zu suchen, als Resultat muß dann der Mischungswerth der Maßeinheit herauskommen.

§ 117.

Uebungs-Aufgaben.

1) Ein Krämer mischt zweierlei Sorten Kaffeebohnen in gleichen Quantitäten; von der einen Sorte kostet das Pfd. 1,62 M. und von der anderen 1,36 M. Welchen Werth erhält das Pfd. von der Mischung?

2) Ein Melber hat 95 Pfd. Mehl, wovon das Pfd. 0,24 M. kostet, und 57 Pfd., à 0,32 M.; er will beide Sorten mischen, wie theuer hat er das Pfd. von der Mischung zu verkaufen?

3) Ein Weinwirth mischt dreierlei Sorten Wein zu gleichen Theilen; von der ersten Sorte kostet das Liter 2,17 M., von der zweiten 1,90 M. und von der dritten 1,45 M. Wie theuer muß er das Liter von der Mischung verkaufen?

4) Ein Bettfedern-Händler mischt dreierlei Sorten Bettfedern: von der ersten Sorte nimmt er 40 Pfd. und kostet das Pfund 4,20 M., von der zweiten 14 Pfd., à 2,90 M., und von der dritten 14 Pfd., à 2,10 M. Welchen Preis erhält das Pfd. von der Mischung?

5) Ein Reisender verbrauchte am ersten Tage seiner Reise 20,36 M., am zweiten Tage 15,40 M., am dritten 36,50 M. und am vierten 30,46 M. Wie viel brauchte er im Durchschnitte an jedem Tage?

6) Jemand kaufte 10 Ster Buchenholz, das Ster zu 13,40 M., 4 Ster Birkenholz, à 10,60 M., 11 Ster Eichenprügel, à 9,10 M., und 39 Ster Fichtenholz, à 8,50 M. Wie theuer kam ihm das Ster im Durchschnitte?

7) In einer Zeitungs-Annonce enthielt die erste Zeile 11 Worte, die zweite 12, die dritte 10, die vierte 13 und die fünfte 9. Wie viele Worte traf es im Durchschnitte auf die Zeile?

8) Ein Kaufmann mischt fünferlei Sorten Waare: von der ersten Sorte nimmt er 15 Pfd., wovon das Pfd. 1,88 M. kostet, von der zweiten 15 Pfd., à 1,68 M., von der dritten 8 Pfd., à 1,54 M., von der vierten 7 Pfd., à 1,24 M., und von der fünften 38 Pfd., à 1,10 M. Welchen Werth erhält das Pfd. von der Mischung?

9) Ein Silberarbeiter legirt (mischt) fünferlei Silber und Kupfer, nämlich: 13 Mark Feinsilber, 3 Mark 15 löthiges Silber, 1 Mark 14 löthiges, 1 Mark 12 löthiges, 2 Mark 10 löthiges Silber und 3 Mark Kupfer. Wie viel löthig wird die Legirung? oder wie viele Loth Feinsilber trifft es auf eine Mark von der Mischung? (siehe § 85, Anmerk.).

10) Ein Goldarbeiter legirt $3\frac{2}{3}$ Mark Feingold, $1\frac{2}{3}$ Mark 18 karätiges Gold, $\frac{1}{3}$ Mark 14 karätiges, 1 Mark 10 karätiges, $2\frac{1}{3}$ Mark 6 karätiges Gold und $4\frac{1}{3}$ Mark Kupfer. Wie viel karätig wird die Legirung? oder wie viele Karat Feingold trifft es auf 1 Mark von der Mischung?

11) Eine Milchfrau will durch Mischung einer guten Milch mit einer abgerahmten eine Qualität herstellen, von welcher das Liter 15 Pf. werth ist. Von der guten Milch kostet das Liter 18 Pf. und von der abgerahmten 8 Pf. In welchem Verhältnisse muß sie die Mischung vornehmen?

12) Eine Obstlerin hat zweierlei Sorten Kirschen: von der einen Sorte kostet das Pfd. 36 Pf. und von der anderen 24 Pf. Sie will durch Mischung eine Sorte erzeugen, von welcher das Pfd. 27 Pf. werth ist; nach welchen Verhältnißzahlen muß sie mischen?

13) Jemand kaufte dreierlei Sorten Holz in ungleichen Quantitäten, wovon das Ster im Durchschnitt auf 11,20 M. kam. Von der ersten Sorte kostete das Ster 13,80 M., von der zweiten 10,90 M. und von der dritten 9,50 M. In welchem Verhältnisse standen die Quantitäten dieser drei Sorten zu einander?

14) Ein Krämer hat dreierlei Sorten Reis: von der ersten Sorte kostet das Pfd. 36 Pf., von der zweiten 33 Pf. und von der dritten 28 Pf. Er möchte durch Mischung eine Qualität hervorbringen, von welcher das Pfd. 30 Pf. werth ist; in welchem Verhältnisse muß er mischen?

15) Ein Restaurateur hat viererlei Sorten Fleisch in ungleichen Quantitäten eingekauft, wovon im Durchschnitte das Pfd. auf 51 Pf. kam. Von dem Ochsenfleisch kostete das Pfd. 60 Pf., vom Kuhfleisch 45 Pf., vom Kalbfleisch 42 Pf., vom Schweinefleisch 72 Pf. In welchem Verhältnisse standen die Quantitäten der vier eingekauften Fleischsorten zu einander?

16) Ein Silberarbeiter legirt Feinsilber, 14 löthiges Silber, 10 löthiges und Kupfer, um 13 löthiges Silber zu erhalten; nach welchen Verhältnißzahlen muß er legiren? (siehe § 85, Anmerk.).

17) Jemand bestellte bei einem Melber gemischtes Mehl zum Brodbacken. Er verlangte, daß dieses Brodmehl aus Weizen-, Roggen-, Gersten-, Erbsen- und Linsenmehl bestehe und daß das Pfd. gerade 30 Pf. koste. Vom Weizenmehl kostete das Pfund 40 Pf., vom Roggenmehl 33 Pf., vom Gerstenmehl 28 Pf., vom Erbsenmehl 27 Pf. und vom Linsenmehl 20 Pf. Welche Verhältnißzahlen muß er dem Melber angeben, damit dieser in dem verlangten Verhältnisse mischen kann?

18) Ein Kaufmann mischt fünferlei Sorten einer Waare

um eine Qualität herzustellen, von welcher das Pfd. 50 Pf. werth ist. Von der ersten Sorte kostet das Pfd. 1 M., von der zweiten 80 Pf., von der dritten 65 Pf., von der vierten 45 Pf. und von der fünften 35 Pf. Nach welchen Verhältnißzahlen muß er diese Sorten mischen?

---

19) Jemand kaufte zwei Zuckerhüte von zweierlei Qualität, wovon das Pfund im Durchschnitte auf 54 Pf. kam. Von der obesseren Sorte kostete das Pfd. 57 Pf. und von der geringere 48 Pf. Wie viele Pfd. wog jeder Zuckerhut, wenn beide zusammen ein Gewicht von 18 Pfd. hatten?

20) Ein Gemüsehändler hat zweierlei Sorten Kartoffeln: von der einen Sorte kostet der Sack 3,20 M. und von der anderen 2,40 M. Er möchte beide Sorten so mischen, daß der Sack von der Mischungsqualität 3 M. werth ist; wie viele Säcke muß er von jeder Sorte nehmen, um 20 Säcke als Mischungsquantum zu erhalten?

21) Ein Materialist will aus zweierlei Sorten Weingeist, wovon das Liter der einen Sorte 80 Pf. und das der andern 50 Pf. kostet, eine Mittelsorte durch Mischung erzeugen, von welcher das Liter 60 Pf. werth ist. Wie viele Liter muß er von jeder Sorte nehmen, um ein Hektoliter als Mischungsquantum zu bekommen?

22) Ein Essig-Fabrikant hat Weinessig und noch zwei geringere Sorten Essig: vom Weinessig kostet das Liter 54 Pf., von der zweiten Sorte 18 Pf. und von der dritten 12 Pf. Er will durch Mischung eine vierte Sorte herstellen, um von dieser das Liter um 30 Pf. verkaufen zu können. Wie viel hat er von jeder der drei vorhandenen Sorten zu nehmen, wenn das Mischungsquantum 2 Hl 60 L betragen soll?

23) Eine Milchhändlerin hat eine gute und eine abgerahmte Milch, welche sie unter Zugabe von Wasser mischen will, jedoch nicht in betrügerischer Absicht, sondern um eine mittlere Sorte zu erhalten, von welcher sie das Liter um 12 Pf. verkaufen möchte. Von der guten Milch kostet das Liter 20 Pf. und von der abgerahmten 6 Pf. Wie viel muß sie von jeder Sorte, sowie vom Wasser zur Mischung nehmen, um 85 Liter als Mischungsquantum zu erhalten?

24) Ein Kaufmann mischt dreierlei Sorten Kaffee, um eine neue Qualität zu erhalten, von welcher das Pfd. 1,20 M. werth ist. Von der ersten Sorte verkauft er das Pfd. um 1,60 M., von der zweiten um 1,40 M. und von der dritten um 1,10 M. Welche Quantitäten muß er von jeder Sorte nehmen, wenn er als Mischungsquantum 120 Kg. wünscht?

25) Ein Gastwirth kaufte viererlei Sorten Fleisch mit einem Gesammt-Gewichte von 36 Pfd. um 18,72 M. Vom Schweinefleisch kostete das Pfd. 70 Pf., vom Ochsenfleisch 60 Pf., vom Kalbfleisch 40 Pf. und vom Hammelfleisch 45 Pf. Welche Quantitäten kaufte er von jeder Sorte?

26) Ein Weinwirth will aus dreierlei Weinsorten und Wasser durch Mischung eine vierte Sorte herstellen, von welcher er das Liter um 1,60 M. zu verkaufen gedenkt. Von der ersten Sorte kostet das Liter 2 M., von der zweiten 1,80 M., von der dritten 1,50 M. Wie viele Liter hat er von jeder Weinsorte und vom Wasser zur Mischung zu nehmen, wenn das Mischungsquantum 1 Hl 61 L betragen soll?

27) Jemand kaufte 87 Kg Aepfel von viererlei Sorten um 17,40 M. Von der ersten Sorte kostete das Pfd. 20 Pf., von der zweiten 15 Pf., von der dritten 12 Pf. und von der vierten 6 Pf. Welche Quantität hat er von jeder Sorte gekauft?

28) Ein Schnittwaaren-Händler ließ sich aus einer Fabrik fünf Stück Baumwollentuch, jedes von einer anderen Sorte, schicken, es waren zusammen 120 Meter, welche 64,80 M. kosteten. Von der ersten Sorte kostete das Meter 75 Pf., von der zweiten 65 Pf., von der dritten 60 Pf., von der vierten 50 Pf. und von der fünften 40 Pf. Wie viele Meter waren an jedem Stücke?

29) Ein Silberarbeiter soll einen 15 Pfd. schweren Pokal aus 13 löthigem Silber verfertigen; er hat aber gerade kein solches Silber, sondern feines, 15-, 12- und 9 löthiges Silber und Kupfer. Aus diesen fünf Metallsorten macht er nun die verlangte 13 löthige Legirung; wie viele Pfd. hat er von jeder Sorte zu nehmen?

30) Ein Goldarbeiter hat den Auftrag, einen 1 Pfd. 130 g schweren Kelch von 18 karätigem Golde zu verfertigen; er hat aber zufällig kein solches Gold und hilft sich damit, daß er von dem ihm zu Gebote stehenden feinen, 20-, 14- und 8 karätigen

Golde und von Kupfer die verlangte 18 karätige Legirung macht. Welches Gewicht hat er von jeder Goldsorte und vom Kupfer zur Legirung zu nehmen?

---

31) Bei einem Zinngießer wurde ein Gefäß bestellt, welches aus Zinn und Blei bestehen sollte und von welchem das Pfd. nur auf 90 Pf. kommen durfte. Das Pfd. Zinn kostete sammt Arbeit 1,30 M. und das Pfd. Blei 35 Pf. Er hatte einen Klumpen Zinn von $2\frac{1}{5}$ Pfd., welchen er ganz zur Legirung verwenden wollte; wie viel Blei hatte er dazu zu nehmen?

32) Ein Oekonom hatte einen Mann und eine Frau einige Zeit als Taglöhner in Arbeit. Der Mann erhielt täglich 2 M. und die Frau 1,50 M. als Lohn. Als sie ausbezahlt wurden, traf es im Durchschnitte jeder Person täglich 1,80 M. Der Mann war 18 Tage bei dem Oekonomen in Arbeit, wie lange arbeitete die Frau bei ihm?

33) Ein Branntweinbrenner fabricirt zweierlei Sorten Branntwein, das Liter um 80 Pf. und um 50 Pf. Er möchte noch eine dritte Sorte, welche er aber durch Mischung der beiden vorhandenen Sorten erzeugt und von welcher das Liter 60 Pf. werth ist. Wenn er zur Mischung von der besseren Sorte 50 Liter nimmt, wie viel muß er von der geringeren Sorte nehmen?

34) Ein Materialist will aus 90- und 50 procentigem Weingeiste*) durch Mischung unter Zugabe von Wasser 80 procentigen Weingeist zu Stande bringen. Wenn er zur Mischung vom 90 procentigen Weingeiste 44 Liter nimmt, wie viele Liter hat er vom 50 procentigen und wie viel Wasser zu nehmen?

35) Von einem Bettfedern-Händler verlangt Jemand Bettfedern, das Pfd. um 3 M.; er hat aber keine um diesen Preis, daher mischt er drei vorhandene Sorten, von welchen das Pfd. 3,80 M., 3,50 M. und 2 M. kostet. Von der ersten Sorte hat er aber nur noch 5 Pfd., welche er ganz in die Mischung nimmt; welche Quantitäten muß er von den beiden übrigen Sorten in die Mischung bringen?

---

*) Weingeist oder Spiritus ist eine Mischung von Alkohol und Wasser. Der Weingeist wird nach dem Procent-Gehalte des Alkohols benannt; sind nämlich in 100 Theilen Weingeist z. B. 90, 80, 70 oder 60 Theile Alkohol enthalten, so heißt er beziehungsweise 90-, 80-, 70- oder 60 procentig.

36) Ein Melber hat dreierlei Sorten Mehl, das Pfd. um 36, 30 und 24 Pf.; er mischt diese 3 Sorten, um eine vierte Qualität zu erhalten, welche 27 Pf. werth ist. Von der geringsten Sorte bringt er 50 Pfd. in die Mischung, wie viel hat er von den übrigen zwei Sorten zu nehmen?

37) Ein Getreidehändler kaufte auf einer Schranne viererlei Sorten Getreide; vom Weizen kostete ihm das Hektoliter 16,50 M., vom Roggen 12,60 M., von der Gerste 10,20 M. und vom Haber 8,10 M. Im Durchschnitte kaufte er das Hektoliter um 11,80 M. Wenn er von der Gerste 16 Hektoliter kaufte, wie viel muß er von den übrigen Getreidearten gekauft haben?

38) Ein Weinhändler mischt dreierlei Sorten Wein, das Liter zu 2,80 M., zu 2,50 M. und zu 2,40 M., auch Wasser gießt er dazu. Er will eine Mischung hervorbringen, von welcher das Liter 2,60 M. werth ist. Vom Wasser bringt er 12 Liter in die Mischung, wie viele Liter muß er von jeder Weinsorte nehmen?

39) Ein Händler kaufte von 5 Bauern Kartoffeln, den Sack zu 3,20 M., zu 3 M., zu 2,90 M., zu 2,85 M. und zu 2,80 M. Im Durchschnitte kommt ihm der Sack auf 2,95 M. Von dem Bauern mit den theuersten Kartoffeln bekam er 14 Säcke, wie viele Säcke kaufte er von jedem der übrigen Bauern?

40) Ein Schuhhändler verkaufte auf einer Messe Filzschuhe von sechserlei Größen und von eben so vielen verschiedenen Preisen, nämlich: das Paar zu 4 M., zu 3,90 M., zu 3,80 M., zu 3,20 M., zu 3 M. und zu 2,80 M. Im Durchschnitte verkaufte er das Paar um 3,10 M. Von der Sorte zu 3,80 M. konnte er 18 Paar verkaufen, wie viele Paar setzte er von jeder der übrigen Sorten ab?

Anhang.

Maße und Gewichte.

§ 118.

Alle Namen der metrischen Maße und Gewichte sind je aus einem griechischen oder lateinischen Zahlworte und einem das Grund-Maß bezeichnenden griechischen oder lateinischen Substantivum zu-

sammengesetzt. Die griechischen Zahlwörter zeigen an, daß das betreffende Maß das 10-, 100- oder 1000fache des Grundmaßes ist, und bezeichnen somit die größeren Maße von verschiedenen höheren Ordnungen; die lateinischen Zahlwörter geben an, daß das Maß der 10., 100. oder 1000. Theil des Grundmaßes ist, und bedeuten daher die kleineren Maße von verschiedenen niedrigeren Ordnungen.

Demgemäß unterscheidet man bei der Eintheilung eines jeden Grundmaßes zwei Theile: eine obere Eintheilung, in welcher die Namen der größeren Maße mit den griechischen Zahlwörtern vorkommen, und eine untere Eintheilung, in welcher die Namen der kleineren Maße mit den lateinischen Zahlwörtern figuriren.

Die Namen der Grundmaße sind: Meter (von metron), Liter (v. litra) und Gramm (v. gramma), alle drei aus dem Griechischen; Ar (v. area) aus dem Lateinischen.

Folgende sind die Zahlwörter in der daneben durch Ziffern angegebenen Bedeutung und in der Form, wie sie in Verbindung mit den Namen der Grundmaße vorkommen:

aus dem Griechischen:		aus dem Lateinischen:	
Kilo (von chilioi),	1000	deci (v. decem, 10),	$\frac{1}{10}$
Hekto (v. hekaton),	100	centi (v. centum, 100),	$\frac{1}{100}$
Deka (v. deka),	10	milli (v. mille, 1000),	$\frac{1}{1000}$

Längenmaß. Die Grundeinheit des Längenmaßes ist das Meter, der 10'000,000. Theil des durch die Sternwarte von Paris gehenden Erdmeridian-Quadranten. Das Meter bildet die Grundlage des Quadrat-, Cubik-, Ar- und Litermaßes, sowie des Grammgewichtes, weshalb diese Maße vom Meter abhängen und die metrischen Maße und Gewichte heißen.

Flächenmaße. Jede Einheit des Flächenmaßes ist ein Quadrat (□), d. i. eine viereckige Fläche von gleicher Länge und Breite. Die Grundeinheit des Flächenmaßes ist das Quadrat-Meter, ein Quadrat, welches 1 Meter nach der Länge und Breite hat. Jeder Längenmaß-Name, welcher mit dem Worte „Quadrat" verbunden ist, bezeichnet die Länge und Breite des Quadrates.

Als Grundeinheit des Feldmaßes dient das Ar oder Quadrat-Dekameter, ein Quadrat, welches 1 Dekameter lang und breit ist. Statt Kiloar sagt man Kiliar und statt Dekaar kürzer Dekar.

Körper- oder Cubikmaß. Jede Einheit des Cubikmaßes ist ein Würfel, d. i. ein achteckiger Körper, dessen Oberflächen 6 gleiche Quadrate sind, und welcher somit gleiche Länge, Breite und Höhe hat. Die Grundeinheit des Cubikmaßes ist das Cubik-Meter, ein Würfel, welcher 1 Meter lang, breit und hoch ist. Jeder mit dem Worte „Cubik" verbundene Längenmaß-Name bezeichnet die Länge, Breite und Höhe des Würfels.

Als Holzmaß dient das Cubikmeter, welches Ster genannt wird.

Hohl- oder Litermaß. Die Grundeinheit des Hohlmaßes ist das Liter, welches einem Cubik-Decimeter gleich kommt.

Gramm-Gewicht. Die Grundeinheit des Gewichtes ist das Gramm; es ist das Gewicht von einem Cubik-Centimeter destillirten (reinen) Wassers, im luftleeren Raume bei der Temperatur seiner größten Dichtigkeit, d. i. bei 4 Grad Celsius, gewogen. Demnach wiegt ein Cubik-Decimeter oder Liter reinen Wassers ein Kilogramm. Statt Kilogramm sagt man auch bloß Kilo. 1 Kilo = 2 Pfund; 1 Pfund = 500 Gramm; 1 Zentner = 100 Pfd.; 1 Tonne = 20 Zentner.

Abbreviaturen als Zeichen.

Bei den Abkürzungen der Maß-Namen braucht man vom Zahl- und Hauptworte nur je den Anfangsbuchstaben zu schreiben und zwar lateinisch und groß von den griechischen Zahlwörtern, ebenso lateinisch, aber klein von den übrigen Wörtern, wie folgt:

Längenmaß.	Quadratmaß.	Feldmaß.
Kilometer = Km	Quadrat-Kilometer = □Km	Kiliar = Ka
Hektometer = Hm	„ Hektometer = □Hm	Hektar = Ha
Dekameter = Dm	„ Dekameter = □Dm	Dekar = Da
Meter = m	„ Meter = □m	Ar = a
Decimeter = dm	„ Decimeter = □dm	Deciar = da
Centimeter = cm	„ Centimeter = □cm	Centiar = ca
Millimeter = mm	„ Millimeter = □mm	Milliar = ma

Cubikmaß.	Hohlmaß.	Gramm-Gewicht.
Cubik-Kilometer = c^{Km}	Kiloliter = Kl	Kilogramm = Kg
„ Hektometer = c^{Hm}	Hektoliter = Hl	Hektogramm = Hg
„ Dekameter = c^{Dm}	Dekaliter = Dl	Dekagramm = Dg
„ Meter = c^{m}	Liter = l	Gramm = g
„ Decimeter = c^{dm}	Deciliter = dl	Decigramm = dg
„ Centimeter = c^{cm}	Centiliter = cl	Centigramm = cg
„ Millimeter = c^{mm}	Milliliter = ml	Milligramm = mg

Anmerkung. Diese Abbreviaturen sollen weniger als Abkürzungen, sondern vielmehr als bloße Zeichen betrachtet werden; daher sind die Punkte als Zeichen der Wort-Abkürzung entbehrlich.

§ 119.

Eintheilungen, in welchen jede Maßeinheit durch die Grundeinheit ausgedrückt wird.	**Eintheilungen, in welchen jede Maßeinheit durch die nächst kleinere Maßeinheit ausgedrückt wird.**

Längenmaß.

Obere Eintheilung.	
1 Km = 1000 m	1 Km = 10 Hm
1 Hm = 100 m	1 Hm = 10 Dm
1 Dm = 10 m	1 Dm = 10 m
Untere Eintheilung.	1 m = 10 dm
1 dm = $\frac{1}{10}$ m	1 dm = 10 cm
1 cm = $\frac{1}{100}$ m	1 cm = 10 mm
1 mm = $\frac{1}{1000}$ m	

Flächen- oder Quadratmaß.

Obere Eintheilung.	
1 □Km = 1000,000 □m	1 □Km = 100 □Hm
1 □Hm = 10000 □m	1 □Hm = 100 □Dm
1 □Dm = 100 □m	1 □Dm = 100 □m
Untere Eintheilung.	1 □m = 100 □dm
1 □dm = $\frac{1}{100}$ □m	1 □dm = 100 □cm
1 □cm = $\frac{1}{10000}$ □m	1 □cm = 100 □mm
1 □mm = $\frac{1}{1000000}$ □m	

Körper- oder Cubikmaß.

Obere Eintheilung.	
1 c^{Km} = 1000'000,000 c^{m}	1 c^{Km} = 1000 c^{Hm}
1 c^{Hm} = 1000,000 c^{m}	1 c^{Hm} = 1000 c^{Dm}
1 c^{Dm} = 1000 c^{m}	1 c^{Dm} = 1000 c^{m}
Untere Eintheilung.	1 c^{m} = 1000 c^{dm}
1 c^{dm} = $\frac{1}{1000}$ c^{m}	1 c^{dm} = 1000 c^{cm}
1 c^{cm} = $\frac{1}{1000000}$ c^{m}	1 c^{cm} = 1000 c^{mm}
1 c^{mm} = $\frac{1}{1000000000}$ c^{m}	

Die Eintheilungen des Ar- und Litermaßes, sowie des Gramm-Gewichtes sind ganz dieselben wie die des Längenmaßes.

Neues Papiermaß.

1 Ballen = 10000 Bogen	1 Ballen = 10 Ries
1 Ries = 1000 „	1 Ries = 10 Buch
1 Buch = 100 „	1 Buch = 10 Heft
1 Heft = 10 „	1 Heft = 10 Bogen.

Tabelle des Zeitmaßes.

Jhr.	Tage.	Stunden.	Minuten.	Sekunden.
1 =	365 =	8760 =	525600 =	31536000
	1 =	24 =	1440 =	86400
		1 =	60 =	3600
			1 =	60

Die Reduktions- oder Eintheilungszahl zwischen je zwei in der Eintheilung zunächst auf einander folgenden Maßen ist vom Längen-, Ar-, Liter- und Papiermaße, sowie vom Grammgewichte stets 10, dagegen vom Quadratmaße 100, vom Cubikmaße 1000 und vom Zeitmaße verschieden, wie man aus obigen Eintheilungen ersieht.

1 Ar = 100 □m; 1 Liter = 1 Cubikdecimeter; 1 Cubikcentimeter reinen Wassers wiegt 1 Gramm. Hiernach ergeben sich folgende Vergleichungen des Armaßes mit dem Quadratmaße, sowie des Litermaßes mit dem Cubikmaße und dem Grammgewichte:

1 Ka = 100,000 □m	1 Kl = 1c^m	1 Kl Wasser wiegt	1000 Kg
1 Ha = 10000 □m	1 Hl = 100c^dm	1 Hl " "	100 Kg
1 Da = 1000 □m	1 Dl = 10c^dm	1 Dl " "	10 Kg
1 a = 100 □m	1 l = 1c^dm	1 l " "	1 Kg
1 da = 10 □m	1 dl = 100c^cm	1 dl " "	100 g
1 ca = 1 □m	1 cl = 10c^cm	1 cl " "	10 g
1 ma = $\frac{1}{10}$ □m	1 ml = 1c^cm	1 ml " "	1 g.

§ 120.

Alte Maße und Gewichte.

Duodecimal-Längenmaß (dd).	Decimal-Längenmaß (d.).
1 Ruthe (1°) = 12 Fuß	1 Ruthe (1°) = 10 Fuß
1 Fuß (1') = 12 Zoll	1 Fuß (1') = 10 Zoll
1 Zoll (1'') = 12 Linien	1 Zoll (1'') = 10 Linien
1 Linie (1''') = 12 Scrupel (12^IV)	1 Linie (1''') = 10 Scrupel.

Duodecimal-Quadratmaß (dd □)	Decimal-Quadratmaß (d□).
1 Quadratruthe (1 □°) = 144 □Fuß	1 □Ruthe = 100 □Fuß
1 Quadratfuß (1 □') = 144 □Zoll	1 □Fuß = 100 □Zoll
1 Quadratzoll (1 □'') = 144 □Linien	1 □Zoll = 100 □Linien
1 Quadratlinie (1 □''') = 144 □Scrupel	1 □Linie = 100 □Scrupel.

Duodecimal-Cubikmaß (dd^c).	Dezimal-Cubikmaß (d^c).
1 Cubikruthe (1c°) = 1728 Cubikfuß	1 Cubikruthe = 1000 c'
1 Cubikfuß (1c') = 1728 Cubikzoll	1 Cubikfuß = 1000 c''
1 Cubikzoll (1c'') = 1728 Cubiklinie	1 Cubikzoll = 1000 c'''
1 Cubiklinie (1c''') = 1728 Cubikscrupel.	1 Cubiklinie = 1000 c^IV.

Handels-Gewicht.	Apotheker-Gewicht.
1 Zentner = 100 Pfund	1 Pfund = 12 Unzen
1 Pfund = 32 Loth	1 Unze = 2 Loth
1 Loth = 4 Quint	1 Loth = 4 Drachmen
1 Quint = 4 Pfennig-Gewicht	1 Drachme = 3 Scrupel
1 Pfenniggewicht = 15 Gran.	1 Scrupel = 20 Gran.

1 Kölner Mark = 8 Unzen = 16 Loth = 24 Karat.

Getränk-Maß.	Getreide-Maß.
1 Ohm = 2 Eimer	1 Scheffel = 6 Metzen
1 Eimer = 60 Maß	1 Metzen = 4 Viertel
1 Maß = 2 Seidel	1 Viertel = 2 Achtel
1 Seidel = 2 Quart oder Schoppen.	1 Achtel = 2 Sechzehntel
	1 Sechzehntel = 2 Mäßel oder Dreißiger.

Vollzug des Gesetzes vom 29. April 1869, die Maß-Verhältniß-

I. Längen-

Altes Maß.	Neues Maß.
1 bayer. Fuß zu 12 Zoll od. zu 144 Linien = $129\frac{38}{100}$ Pariser Linien	= 0,2918592 Meter.
1 Zoll	= 2,43216 Centimeter.
1 Linie	= 2,0268 Millimeter.
1 bayer. Klafter zu 6 Fuß	= 1,751155 Meter.
1 geometrische Ruthe zu 10 Fuß	= 2,918592 Meter.
1 bayer. Elle zu 2 Fuß 10¼ Zoll	= 0,833015 Meter.
1 geometrische Stunde, Post- oder Wegstunde = 12,703 Fuß	= 3,70749 Kilometer.

II. Flächen-

1 bayer. Quadratfuß zu 144 Quadratzoll . .	= 0,085182 □Meter.
1 Quadratzoll	= 5,9154 □Centimeter.
1 Quadratlinie	= 4,1079 □Millimeter.
1 Quadratklafter zu 36 Quadratfuß . . .	= 3,0665 □Meter.
1 Quadratruthe zu 100 Quadratfuß . . .	= 8,5182 □Meter.
1 Tagwerk oder Morgen zu 400 Quadratruthen .	= 34,07272 Ar.

III. Körper-

1 Kubikfuß	= 0,024861 Kubikmeter
1 Kubikzoll	= 14,38721 Kubikcm.

Feld-Maß.

1 Tagwerk = 100 Dezimalen
1 Dezimale = 4 □Ruthen
1 □Ruthe = 100 □Fuß.

Papier-Maß.

1 Ballen = 10 Ries
1 Ries = 20 Buch
1 Buch = 24 Bogen Schreibpap.
1 „ = 25 Bogen Druckpap.

Süddeutsche Münzen.

1 Gulden (fl.) = 60 Kreuzer
1 Kreuzer (kr.) = 4 Pfennig
1 Pfennig (pf.) = 2 Heller (hl.).

---

und Gewichts-Ordnung betreffend (Reg.-Bl. Nro. 59).

Zahlen.

Maße.

Neues Maß.	Altes Maß.
1 Meter	= 3,42631 Fuß.
1 Centimeter	= 0,41116 Zoll.
1 Millimeter	= 0,4934 Linie.
1 Kilometer	= 0,269724 Stunde.
1 Meter	= 0,57105 Klafter.
1 Meter	= 0,34263 Ruthe.
1 Meter	= 1,20046 Elle.

Maße.

1 Quadratmeter	= 11,7396 Quadratfuß.
1 Quadratcentimeter	= 0,16905 Quadratzoll.
1 Quadratmillimeter	= 0,24343 Quadratlinie.
1 Ar	= 32,610 Quadratklafter.
1 Ar	= 11,7396 Quadratruthen.
1 Hektar	= 2,9349 Tagwerk.

Maße.

1 Kubikmeter	= 40,2235 Kubikfuß.
1 Kubikcentimeter	= 0,069506 Kubikzoll.

Altes Maß.	Neues Maß.

IV. Hohlmaße für

1 bayr. Maßkanne zu 43 Dezimal-Kubikzoll . .	= 1,06903 Liter.
1 bayr. Eimer zu 64 Maß oder zu 2,752 Kubikfuß	= 68,4177 Liter.

V. Getreid-

1 bayr. Metzen zu 34⅔ Maßkannen . . .	= 37,0596 Liter.
½ „ „ Viertel genannt	= 18,5298 Liter.
¼ „ „ halbes Viertel genannt . . .	= 9,2649 Liter.
⅛ „ „ Maßl genannt	= 4,6325 Liter.
1/16 „ „ halbes Maßl genannt . . .	= 2,3162 Liter.
1/32 „ „ Dreißiger genannt	= 1,1581 Liter.
6 Metzen-Maß Schäffel genannt	= 2,22358 Hektoliter.

VI. Handels-

1 bayr. Pfund zu 32 Loth	= 560 Gramm.
1 Loth à 4 Quentchen	= 17,5 Gramm.
1 Quentchen	= 4,375 Gramm.
1 Zentner zu 100 Pfund	= 56 Kilogramm.
	= 1 Zt. 12 Pfd. Zollgew.

VII. Medicinal- und

1 Pfund (Libra) = 12 Unzen	= 360 Gramm
1 Unze = 8 Drachmen	= 30 Gramm.
1 Drachme = 3 Scrupel	= 3,75 Gramm.
1 Scrupel = 20 Gran	= 1,25 Gramm.
1 Gran	= 0,0625 Gramm.

VIII. Gold-, Silber-, Juwelen-

1 bayr. Mark zu 16 Loth	= 280 Gramm.
1 Loth zu 16 Pfenningen	= 17,5 Gramm.
1 Pfenning	= 1,09375 Gramm.
1 Krone (Goldgewicht)	= 3,24799 Gramm.
1 Sechzehntel	= 0,20300 Gramm.
½ „	= 0,10150 Gramm.
¼ „	= 0,05075 Gramm.
1 Dukaten (Goldgewicht)	= 3,49038 Gramm.
1 Sechzehntel	= 0,21815 Gramm.
½ „	= 0,10907 Gramm.
¼ „	= 0,05454 Gramm.
Das holländische Juwelenkarat	= 20,5894 Centigramm.

Neues Maß.	Altes Maß.
Flüssigkeiten.	
1 Liter	= 0,93543 Maßkannen.
1 Hektoliter	= 1,46161 bayr. Eimer.
Maße.	
1 Hektoliter	= 2,69836 Metzen.
1 Hektoliter	= 5,3967 Viertel.
1 Hektoliter	= 10,79342 halbe Viertel.
1 Hektoliter	= 21,58685 Maßl.
1 Hektoliter	= 43,17370 halbe Maßl.
1 Hektoliter	= 86,34739 Dreißiger.
1 Hektoliter	= 0,44973 Schäffel.
Gewicht.	
1 Kilogramm oder Kilo = 1000 Gramm = 2 Zollpfund	= 1,785715 bayr. Pfund.
1 Dekagramm	= 2,2857 Quentchen.
1 Gramm	= 0,22857 Quentchen.

Apotheker-Gewicht.

1 Kilo = 1000 Gramm . . .	= 2 Libra 9 Unzen 2 Drachmen und 2 Scrupel.
1 Gramm	= 16 Gran.
1 Dezigramm	= 1,6 Gran
1 Centigramm	= 0,16 Gran.

und Perlen-Gewicht.

1 Kilogramm	= 3 Mark	9 Loth	2,28571	Pfenning.
1 Dekagramm	= — „	— „	9,14286	„
1 Gramm	= — „	— „	0,91429	„
1 Kilogramm	= 307	Kronen	14,11891	Sechzehntel.
1 Dekagramm	= 3	„	1,26119	„
1 Gramm	= —	„	4,92612	„
1 Dezigramm	= —	„	0,49261	„
1 Centigramm	= —	„	0,04926	„
1 Kilogramm	= 286	Dukaten	8,02732	„
1 Dekagramm	= 2	„	13,84027	„
1 Gramm	= —	„	4,58403	„
1 Dezigramm	= —	„	0,45840	„
1 Centigramm	= —	„	0,04584	„
1 Gramm	= 4,8569 holländische Juwelenkarate.			

Druckfehler.

Auf Seite 25 in der 3. Zeile lies: „der" statt „den" und „;" statt „:"
„ „ 73 im II. Beispiele lies: $\frac{13}{18}$ statt $\frac{13}{81}$.
„ „ 103 in den Nebenrechnungen zu III rechts lies: $1\frac{1}{4}$ statt $1\frac{1}{14}$.

Druck von A. Ganghofer in Ingolstadt.